Euclides

La fuerza del razonamiento matemático

Ana Millán Gasca

19

La matemática en sus personajes



La matemática en sus personajes
Colección dirigida por Antonio Pérez Sanz

Euclides

La fuerza del razonamiento matemático

1ª edición: 2004
2ª edición: 2007

Foto de cubierta: Detalle de mosaico en las ruinas de Corinto (J. Fernández).

Apartado de Correos 113. 28760 Tres Cantos
Tel.: 91 804 58 17. Fax: 91 804 14 82
www.nivola.com
correo electrónico: contacto@nivola.com

ISBN: 978-84-95599-85-8
Depósito legal: M-132-2007
Impreso en España

Euclides

La fuerza del razonamiento matemático

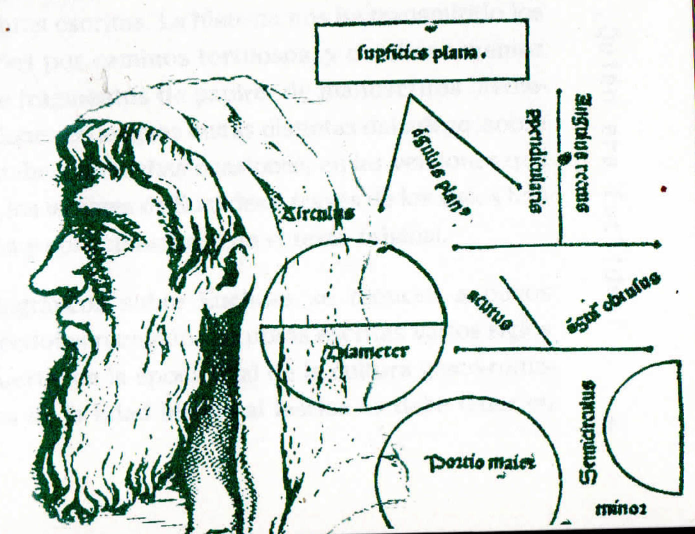
Ana Millán Gasca

20

La matemática en sus personajes

nivola
LIBROS
EDICIONES

Índice



Linea
Punctus
Circulus
Diameter
perpendicularis
angulus rectus
Semicirculus
Portio maior
minor

1 ¿Quién era Euclides?

Como en el caso de otras grandes figuras de la cultura del mundo antiguo, de Euclides ha llegado hasta nosotros el eco imponente de su obra mucho más que la información relativa a las circunstancias de su vida. Puesto que se trataba de un matemático (y podemos usar esta palabra pues era ya usada en la lengua griega), su legado no son airosos edificios o espectaculares esculturas, sino obras escritas. La historia nos ha transmitido los tratados de Euclides por caminos tortuosos, y de ellos tenemos noticia a través de fragmentos de papiro, de manuscritos medievales y de traducciones en lenguas cultas distintas del griego, sobre todo el latín y el árabe. En muchas ocasiones, en las versiones que hoy se conservan, los lectores de Euclides a través de los siglos han mezclado sus ideas y conocimientos con el texto original.

Los datos biográficos sobre Euclides se reducen a pocos comentarios y anécdotas recogidos en obras escritas varios siglos después de su muerte, en la época final de la cultura greco-romana y en los inicios de la Edad Media; al leerlos se debe tener en

Para situarnos históricamente...

Siglo	Año	
Siglo VI a.C.		Tales, Pitágoras
Siglo V a.C.		Hipócrates de Quíos
Siglo IV a.C.	387 335	Platón (428-347) funda la Academia en Atenas Arquitas, Teeteto, Eudoxo Autólico de Pitania Aristóteles (384-322) funda el Liceo en Atenas Menecmo Madurez de Eudemo de Rodas, discípulo de Aristóteles Aristeo
Siglo III a.C.	300	Madurez de Euclides Arquímedes (hacia 287-212) Apolonio (hacia 260-hacia 190)
Siglo II a.C.		Hipsicles Hiparco
Siglo I a.C.		Estrabón
Siglo I d.C.		Herón de Alejandría
Siglo II d.C.		Tolomeo
Siglo III d.C.		Diofanto
Siglo IV d.C.	320 370	Madurez de Pappus Madurez de Teón de Alejandría
Siglo V d.C.	438	Proclo (410/12-485) director de la escuela de Atenas Juan Estobeo
Siglo VI d.C.		Boecio (480-524) Eutocio de Ascalona Isidoro de Mileto Simplicio (hacia 500-549)

cuenta, además, que responden más a la imagen y el prestigio de este autor, ya entonces consolidados, que al deseo de recoger información fidedigna. La hipótesis más verosímil sobre la época de su vida es la siguiente: probablemente Euclides, que parece mostrar en sus ideas sobre las matemáticas la influencia del filósofo Platón (volveremos sobre ello más adelante), era más joven que los discípulos directos de este último; pero era anterior a otros dos grandes matemáticos griegos, sin duda anterior a Apolonio y casi ciertamente anterior a Arquímedes. Platón murió en el año 347 a.C.; Arquímedes vivió aproximadamente entre los años 287 y 212 a.C.; y sabemos que Apolonio vivió en la ciudad de Alejandría, en Egipto, a partir de mediados del siglo III a.C., luego posiblemente la época de madurez de Euclides se sitúa en torno al 300 a.C., entre finales del siglo IV y principios del siglo III a.C. Que fuera anterior a Arquímedes parece confirmarlo el hecho de que este último hace una mención del Libro I de los *Elementos*, la obra principal de Euclides, en su obra *Sobre la esfera y el cilindro*, pero hay quien piensa que esta referencia no la escribió el propio Arquímedes, sino que se trata de una interpolación posterior, es decir, de un comentario añadido por alguien que estudió y copió el texto.

De entre los breves pasajes en los que se habla de la personalidad de nuestro autor, el más antiguo aparece en una de las últimas obras de la matemática griega, la *Colección matemática* escrita por Pappus, un autor activo en Alejandría a principios del siglo IV d.C. En aquella época el Imperio Romano había dejado ya muy atrás el momento de máximo esplendor, y la cultura clásica, griega y latina, declinaba lentamente. Los dos centros de la vida intelectual seguían siendo Atenas (la ciudad que representaba más que ninguna

Platón

otra la cultura griega, donde habían vivido los grandes Sócrates, Platón y Aristóteles) y Alejandría, una ciudad fundada en Egipto, a orillas del Mar Mediterráneo, por Alejandro Magno. Las palabras de Pappus nos indican que Euclides tenía seguidores en Alejandría, lo cual podría hacer suponer que quizá viviera durante algún tiempo en esta ciudad, y por este motivo se le conoce como Euclides de Alejandría (para distinguirlo así de Euclides de Megara, con el que se le confundió durante mucho tiempo); pero se debe tener en cuenta que éste es el único testimonio de su relación con dicha ciudad, que no ha podido ser confirmado por ninguna otra fuente, es decir, por ningún otro autor antiguo.

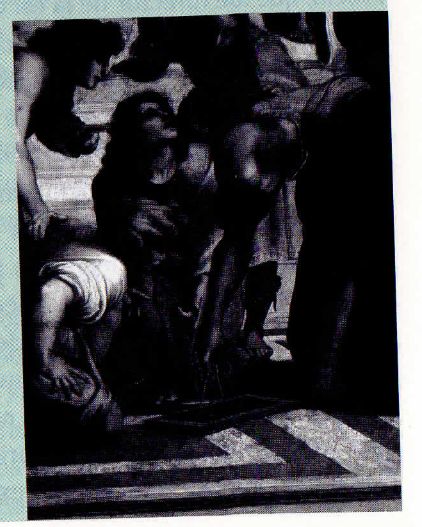
En las obras del final de la Edad Antigua y de la Edad Media los autores evocan con admiración y nostalgia a las grandes figuras del pasado. Pappus se refiere a la actitud de Euclides respecto a los matemáticos que le habían precedido. En efecto, el interés por los problemas relativos a los números y a las figuras geométricas se había empezado a manifestar en Grecia ya en el siglo VI a.C., y muchos autores antes de Euclides se habían dedicado a reflexionar sobre las cuestiones matemáticas y habían escrito sobre el tema. En realidad, los conocimientos acumulados durante los siglos V y IV a.C. eran tantos que algunos autores habían sentido la necesidad de poner orden en todas estas ideas y escribir un libro que las expusiera empezando desde las cosas más sencillas, un libro de *Elementos*. De todos ellos, fue Euclides el destinado a tener más éxito con su iniciativa; es más, su éxito fue tal que este libro ha seguido siendo leído durante siglos, ha sido copiado a mano sin cesar cuando no existía la imprenta, traducido a las lenguas cultas más importantes y publicado en una infinidad de ediciones tras la invención de la imprenta. Seguramente otros libros parecidos al suyo cayeron en el olvido y no sabremos nunca de ellos. Pappus sugiere una explicación del valor del trabajo de Euclides: el respeto por todos aquéllos que habían hecho avanzar a las matemáticas antes que él y una actitud constructiva, es decir, un interés por afinar la precisión de los estudios matemáticos que no implica el considerar superados o faltos de interés los resultados precedentes.

Euclides de Megara y Euclides de Alejandría

Durante mucho tiempo se creyó que el autor de los Elementos *era Euclides de Megara, un filósofo que se inspiraba en Sócrates y que vivió un siglo antes. Esta confusión se remonta a la Antigüedad: el historiador romano Valerio Máximo, en el siglo I d.C., habla de un "Euclides geómetra" contemporáneo de Platón, confundiendo así las dos figuras. El frontispicio de una de las primeras ediciones de los* Elementos *tras la invención de la imprenta (la traducción latina de Giovanni Campano da Novara, corregida por Luca Pacioli, que fue publicada en el año 1509) se inicia así:*

Euclidis Megarensis philosophi acutissimi mathematicorumque omniun sine controversia principis opera a Campano interprete fidissimo tralata...

Esta falsa identificación fue corregida en el siglo XVI: Federico Commandino, autor de una importante traducción latina publicada en 1572, advertía en el prólogo de su edición de la necesidad de evitar este error.



Detalle del cuadro *La Escuela de Atenas* de Rafael que se encuentra en el Museo Vaticano. El personaje que tiene un compás en su mano podría ser Euclides o Arquímedes.

Un fragmento de la Colección matemática *de Pappus*

"Euclides consideraba a Aristeo merecedor de encomio por sus contribuciones a las cónicas, y no intentó anticiparlo ni destruir su sistema; pues mostraba una corrección escrupulosa y una cortesía ejemplar respecto a todos aquéllos que en cualquier medida lograron hacer avanzar a las matemáticas, y no era jamás ofensivo, sino al contrario pretendía la precisión, y no se jactaba como otros. [...] Además Apolonio pudo añadir la porción que faltaba a la teoría de los lugares habiéndose familiarizado de antemano con lo que sobre el tema había escrito Euclides, y habiendo pasado mucho tiempo con los discípulos de Euclides en Alejandría, de lo cual derivaba su hábito mental científico".

Pappus, *Colección matemática*, VII 35.

Más detalles sobre las características de la labor matemática de Euclides aparecen en una obra escrita en el siglo V d.C. por Proclo, que fue director de la escuela de Atenas desde el año 438 hasta su muerte en el 485. Proclo escribió libros sobre varios temas, muchos de ellos dedicados a comentar las obras de Platón, además del texto que aquí nos interesa, titulado *Comentarios al libro I de los Elementos de Euclides*. En algunas páginas de este escrito Proclo traza una breve historia de la geometría griega desde sus orígenes hasta la época de Euclides; de este resumen histórico leeremos un largo fragmento al final del capítulo 4. Proclo narra una anécdota sobre Euclides y el rey Ptolomeo I, uno de los generales de Alejandro Magno, que le sucedió a su muerte como rey de Egipto. Cuenta Proclo que Ptolomeo preguntó a Euclides si había un modo de conocer la geometría más breve y sencillo que el laborioso camino de los *Elementos*. Éste último le respondió que no existía un acceso a la geometría

Busto de Alejandro Magno encontrado en Thasos.

reservado a los poderosos que les evitara la fatiga y el esfuerzo, que no había ningún "camino de reyes" en geometría. Esta narración podría confirmar el que Euclides residiera en Alejandría, la capital del reino de Ptolomeo; pero hay que tener en cuenta que una anécdota similar se atribuye a otro matemático anterior, Menecmo, en una conversación con Alejandro Magno en persona.

Una segunda anécdota aparece en una antología de fragmentos de obras escritas en griego que fue recopilada por otro autor del siglo V d.C. llamado Juan Estobeo (nombre derivado de la ciudad de Estobe, en Macedonia). Cuenta Estobeo de un discípulo que había comenzado a estudiar geometría con Euclides. Una vez aprendido el primer teorema, el discípulo preguntó al maestro qué ventajas podía tener aprender tales cosas. Entonces este último llamó a su esclavo y le dijo: *"Dale tres óbolos, pues necesita sacar provecho de lo que aprende"*.

La respuesta de Euclides nos recuerda una característica esencial de la matemática griega: se trata de una disciplina que se cultiva por sí misma, independientemente de su aplicación o valor práctico. Este tipo de saber desinteresado, sin utilidad inmediata, es típico de la cultura griega: las matemáticas representaron en Grecia uno de los principales ejemplos de una tal *contemplación* de la verdad, una forma de conocimiento puro.

2 Los predecesores de Euclides

El nacimiento de la ciencia en Grecia

Los misterios de la naturaleza, de la Tierra, y del cosmos han despertado la curiosidad de los hombres desde las primeras civilizaciones, en las que se realizaron los primeros intentos de proceder de una manera sistemática en esta búsqueda del conocimiento. Los depositarios del saber fueron inicialmente, en Mesopotamia y en Egipto, los escribas, que conocían la escritura y los números; los escribas trabajaban al servicio de la autoridad política o religiosa y eran a la vez administradores, contables, arquitectos, médicos, astrólogos y adivinos. En aquellos tiempos remotos se consideraba que el saber poseía un origen divino, bien fuera aquél útil en la vida cotidiana, en las distintas actividades prácticas, como aquél relativo a las cosas más recónditas e inaccesibles o la capacidad de predecir el futuro. Se trataba a menudo de una tradición oral: el saber era transmitido de los más expertos a quienes se iniciaban en una actividad; pero los conocimientos quedaban también fijados en algunas recopilacio-

nes de instrucciones, así como en grandes composiciones poéticas o religiosas.

La *Ilíada* y la *Odisea*, los dos grandes poemas de Homero que marcan el inicio de la cultura griega en el siglo IX a.C., pueden ser vistos como una gran enciclopedia, pues contienen múltiples descripciones geográficas e informaciones sobre los astros, los fenómenos atmosféricos o las propiedades de los sonidos y de la luz. Sin embargo, en el siglo VI a.C. comenzó a delinearse entre los griegos una evolución hacia un saber mucho más elaborado y estructurado en diferentes niveles: este proceso ha llevado a considerar que la ciencia, como hoy la entendemos, nació en Grecia. En la cultura griega se estableció netamente la diferencia entre el conocimiento técnico, ligado a la capacidad operativa (realizar algo con un fin determinado) y obtenido gracias a la experiencia, y el conocimiento especulativo, que se desarrolla por medio de la reflexión, la palabra y el diálogo. Se distinguía por tanto el saber que tenía una aplicación práctica de aquél sin utilidad inmediata.

En el mundo griego el interés por la discusión de concepciones alternativas a través de la argumentación se manifestaba en la política y en los tribunales, y encontraba un terreno apropiado también en el debate público de cuestiones intelectuales de todo tipo, y entre ellas algunas relativas a la medicina o a las matemáticas. Era éste uno de los medios para alcanzar la notoriedad individual que constituía una ambición muy común entre los griegos. Una figura característica de la sociedad griega eran los sofistas, maestros itinerantes que se ganaban la vida impartiendo lecciones a un público que acudía libremente atraído por la capacidad polémica, por la riqueza de los argumentos utilizados, por la espectacularidad de las paradojas. Los escritores satíricos no dejaron de criticar una actividad que consideraban inútil y ociosa, propia sólo de quien no tiene nada mejor que hacer que perder el tiempo. Aristófanes, en su comedia *Las nubes*, describe irónicamente un lugar dedicado sólo a pensar, en el que bajo la guía

Epistéme

La palabra ciencia deriva del latín scientia*; en griego el término correspondiente es* epistéme*, que indica el aspecto teórico y riguroso del conocimiento, contrapuesto a aquello que es pura opinión (*dóxa*): los pensadores griegos, a partir de Parménides, reflexionaron mucho sobre los límites del saber humano y sobre las distintas fuentes de este saber y los distintos tipos de conocimiento.*

La palabra epistéme *se refería inicialmente a los conocimientos necesarios para ejercitar cualquier tipo de actividad u oficio. Sucesivamente se estableció una distinción más clara entre, por una parte, la competencia técnica (en griego* téchne*), basada principalmente en la experiencia y en la habilidad manual, y, por otra, el conocimiento independiente de su aplicación y libre de los errores que provienen de la percepción de la realidad a través de los sentidos (para el que se reservaba el término* epistéme*).*

del gran pensador Sócrates (469-399 a.C.) se reflexiona sobre "las cosas en alto en el aire", la meteorología, refiriéndose a los fenómenos del cielo en general, tanto desde el punto astronómico como atmosférico y climático. Según el cómico, las enseñanzas de Sócrates y otros como él eran perniciosas para la educación de los jóvenes, pues les llevaban a dejar de respetar a los padres y los valores recibidos por tradición. Platón, discípulo de Sócrates, procuró en sus obras mostrar que las enseñanzas de este último se distinguían de las de los demás sofistas, a los que acusaba de no exponer sino meras opiniones persuadiendo a quien los escuchaba con artificios retóricos.



Sócrates

El dinamismo intelectual alimentado por el deseo de notoriedad individual supone una radical novedad respecto a las culturas de organización autoritaria que se desarrollaron en Egipto, en Mesopotamia y, más tarde, en China, fuertemente centradas en la tradición o en el culto religioso y en las que la jerarquía sacerdotal o estatal ocupaba un lugar fundamental en la estructura social. En estas civilizaciones la doctrina religiosa tradicional limitaba fuertemente la posibilidad de concebir teorías alternativas en relación con la naturaleza y el cosmos. El saber, de inspiración divina, era prerrogativa de un estrecho círculo de personas y se transmitía en escuelas donde los futuros escribas o funcionarios eran instruidos en la lectura, la escritura, la numeración y los cálculos y en la resolución de problemas con la ayuda de números y figuras. En Grecia se extendió decisivamente la circulación del saber, y esta circunstancia enriqueció enormemente el patrimonio de conocimientos. La nueva figura del sapiente que se ganaba la vida enseñando correspondía a una ambición intelectual de

amplios horizontes, a la exigencia de aprender, a una idea de educación del ciudadano (*paideia* en griego) que superaba la concepción de la instrucción como privilegio reservado a unos pocos: así como el individuo libre podía participar en la actividad política o defenderse en los tribunales, aspiraba también a participar o seguir las discusiones sobre cuestiones de física o de geometría y los debates sobre el tiempo y sobre la materia que compone el Universo.

La composición de tratados: matemáticas y escritura

Para explicar el *milagro griego*, es decir, el espectacular desarrollo de las artes, de la filosofía y de las ciencias en Grecia que constituye la base de la moderna civilización occidental, es necesario tener en cuenta el papel desempeñado por la transmisión escrita de las ideas. La escritura alfabética griega reproducía el sonido de las palabras, a diferencia de lo que ocurría con las técnicas de escritura de otras civilizaciones, por ejemplo los jeroglíficos egipcios, y se acercaba a la expresión hablada mucho más que otras formas de escritura, como la del hebreo antiguo, en las que un mismo conjunto de símbolos podía corresponder a palabras diferentes, pues se anotaban sólo los sonidos de las consonantes. Como consecuencia de ello, aunque en la cultura griega los debates y las exhibiciones orales tenían una gran importancia, a partir de finales del siglo V a.C. una parte de la vida intelectual comenzó a quedar fijada en textos escritos, pues entre sus protagonistas se empezó a difundir la costumbre de redactar tratados sobre las distintas materias.

El hábito de escribir para transmitir las propias ideas permitió profundizar y precisar los conceptos abstractos en filosofía, en política y en la ciencia, que constituyen la fundamental aportación de la cultura griega. La fijación escrita modificó la circulación del saber, ampliándolo más allá de los miembros de las profesiones y estimulando una reflexión sobre la naturaleza del conocimiento, la relación entre las distintas artes y disciplinas y

el papel de éstas en la educación. Los tratados, escritos sobre rollos de papiro y conservados en las bibliotecas, permitieron la difusión de las ideas a diversas áreas geográficas y su conservación -aunque amenazada por la fragilidad material del soporte y por la escasez de copias- para la posteridad. En el caso de la medicina, por ejemplo, existían varias tradiciones que se transmitían oralmente: desde la de los sacerdotes en los santuarios del dios Asclepio, a las de los curanderos, los vendedores de pociones y remedios o las comadronas. Con la redacción de las primeras obras escritas en el siglo V a.C. aparece una forma de medicina culta, *científica*, que se desarrollará en adelante sin que ello impida la continuidad de las demás tradiciones; pues los médicos científicos, que consideraban a la enfermedad sobre la base de los conocimientos del mundo natural y sin recurrir a explicaciones sobrenaturales, obtenían en la práctica éxitos modestos y difícilmente podían convencer de la superioridad de los métodos que propugnaban frente a las alternativas de sus competidores.

La escritura de las primeras obras matemáticas en Grecia supuso también una novedad radical. Los griegos fueron los primeros que identificaron la existencia de una serie de disciplinas hermanadas por un método de argumentación particularmente convincente, la *demostración*, un método que se realizaba de manera perfecta gracias a la expresión escrita; y fueron griegos los autores de los primeros libros dedicados específicamente a las matemáticas, las obras que crearon nuestra idea misma de matemáticas.

De la elocuencia a la palabra escrita

La transición de lo oral a lo escrito supuso una ruptura fuerte en la cultura griega. La enseñanza del gran filósofo Sócrates se desarrolló todavía sólo oralmente, a través del diálogo con sus discípulos, siguiendo una técnica de exploración de la verdad por medio de preguntas y respuestas que aún hoy llamamos socrática.

Conocemos las ideas de Sócrates gracias a Platón, un pensador fundamental en la historia de nuestra cultura, que a diferencia de su maestro escribió muchas obras, la mayor parte en forma de diálogo, como si se tratara de una anotación de la discusión a viva voz; el protagonista de muchos de estos diálogos es precisamente Sócrates. En uno de ellos, el diálogo con Fedro, Platón pone en boca de Sócrates una advertencia sobre el peligro de que la escritura haga perder la riqueza y el dinamismo del intercambio oral:

"Porque es impresionante, Fedro, lo que pasa con la escritura, y por lo que tanto se parece a la pintura. En efecto, sus vástagos están ante nosotros como si tuvieran vida; pero, si se les pregunta algo, responden con el más altivo de los silencios. Lo mismo pasa con las palabras. Podrías llegar a creer como si lo que dicen fueran pensándolo; pero si alguien pregunta, queriendo aprender de lo que dicen, apuntan siempre y únicamente a una y la misma cosa. Pero, eso sí, con que una vez algo haya sido puesto por escrito, las palabras ruedan por doquier, igual entre los entendidos que como a aquellos a los que no les importa en absoluto, sin saber distinguir a quienes conviene hablar y a quienes no. Y si son maltratadas o vituperadas injustamente necesitan siempre la ayuda del padre, ya que ellas solas no son capaces de defenderse ni de ayudarse a sí mismas".

Platón, *Fedro*, 275d
Traducción de E. Lledó Íñigo, *Diálogos III*, Gredos, 1997.

La idea griega de matemáticas

El origen de la geometría, la aritmética y la astronomía se remonta a las primeras civilizaciones, como los mismos autores griegos observaban, refiriéndose a los conocimientos heredados de los egipcios o de los babilonios. El uso de las primeras formas de recuento y de numeración es tan antiguo o más que la misma escritura. La vida económica y la organización burocrática indujeron el desarrollo de una serie de métodos numéricos y geométricos para resolver cuestiones de índole práctica, por ejemplo de contabilidad, cálculo de impuestos, reparto de herencias o medición de terrenos. En los archivos de los palacios y templos de las antiguas ciudades de Mesopotamia se han encontrado una gran cantidad de tablillas de arcilla con registros y anotaciones numéricas, así como con problemas resueltos, tablas aritméticas y de conversión de medidas. Y se conservan también algunos papiros con listas de problemas resueltos por los escribas egipcios. En estas culturas el interés por las propiedades de las figuras y de los números derivaba principalmente de su uso en la práctica o bien para los cálculos astronómicos, que permitían realizar las predicciones astrológicas. Ello no excluye que comenzara a manifestarse una fascinación intelectual por los números y el juego de sus combinaciones, como demuestra la presencia de problemas sin utilidad efectiva -con enunciado realista pero datos numéricos sin posible valor real, o con un enunciado semejante al de un juego o adivinanza -que los escribas babilonios resolvían, quizá para demostrar su valor y su habilidad técnica.

La palabra *matemáticas* deriva de la palabra griega *máthema* (en plural *mathemata*), que designa una cosa *que se aprende*, por medio de la enseñanza o por experiencia directa. Un pequeño fragmento que ha llegado hasta nosotros de Arquitas nos da una información interesante al respecto. Este brillante pensador, considerado por la tradición un pitagórico, vivió entre finales del siglo V y principios del siglo IV a.C. y fue gobernante de Tarento (la principal colonia de la Magna Grecia, en la península italiana).

La tradición de la matemática práctica

Las investigaciones históricas y antropológicas muestran que en casi todas las áreas geográficas y culturales del mundo una serie de conocimientos matemáticos prácticos han acompañado el trabajo y la actividad económica de comerciantes, artesanos o maestros de obras, así como la organización y la administración de las comunidades: se trataba de habilidades operativas con números y figuras y de resolución de problemas concretos.

Hasta la época moderna ha existido una genuina tradición de matemática práctica que, además, fue transversal a muchas culturas antiguas. Nos referimos al hecho de que existió una amplia circulación de conocimientos a través de los canales internacionales de transmisión representados, en la época antigua y medieval, por las vías comerciales, como la vía de la seda que llegaba a Europa desde China. Así, los mismos problemas o acertijos matemáticos, con enunciados iguales e incluso los mismos datos, se encuentran en documentos que proceden de China, de la India, de Egipto o de Mesopotamia, y en colecciones de problemas más recientes, escritas en época medieval en latín, en árabe, en griego o en las distintas lenguas romances. Este tipo de matemática elemental resultaba muy útil en el ejercicio de las profesiones, como lo demuestra el hecho de que en muchas ciudades italianas, en el siglo XIII, los ricos comerciantes que controlaban la actividad mercantil internacional fundaron escuelas para que los niños aprendieran a manejar los números y a resolver problemas.

Arquitas incluía entre las *mathemata* o "cosas que se aprenden" las cuestiones sobre los astros celestes, la geometría, la aritmética, el estudio de las esferas y la música; y afirmaba que estas disciplinas o ciencias "parecían hermanas". Lo que unía con una relación de parentesco estas disciplinas era el hecho de que quienes las cultivaban podían convencer con más fuerza que ningún otro saber humano, pues utilizaban argumentos casi imposibles de combatir.

La pasión de los griegos por la discusión les había hecho comprender que los razonamientos utilizados podían resultar falsos bajo una apariencia convincente y que sobre los fenómenos naturales los sentidos podían engañar. La observación de la realidad era para algunos, por ejemplo entre los médicos, una vía apropiada para obtener nuevos y mejores conocimientos, pero era rechazada por otros, que consideraban que sólo el razonamiento abstracto, es decir, aquél que se alejaba de las cosas concretas considerando principios generales, podía conducir a la verdad. Pues bien, en las discusiones de astronomía, de geometría o de aritmética se utilizaban argumentos que, aun sirviéndose de figuras u otros elementos concretos, constituían verdaderas demostraciones, razonamientos incontrovertibles.

En la época de Arquitas todavía no existía una opinión unánime respecto a cuáles eran estas disciplinas *hermanas*, las matemáticas, y, sobre todo, cuál era la principal o modelo de todas ellas. Entre ellas se contaba sin duda la geometría, el estudio de las propiedades de las figuras planas o de los sólidos, y la aritmética o estudio de las propiedades de los números. A estas dos se añadían otras, principalmente la astronomía, el estudio de los cielos, y la música, pero también la óptica y la mecánica. Hoy consideramos a la astronomía, a la óptica y a la mecánica como disciplinas independientes que utilizan muchos instrumentos matemáticos; y las dos últimas citadas son parte de la física. Nos resulta muy extraño considerar a la música, aún entendida como teoría de la música o harmónica,

como parte de las matemáticas, y sin embargo siguió siendo considerada como tal durante toda la época antigua y medieval. Y viceversa, nuevas disciplinas que los griegos no desarrollaron han ido floreciendo como nuevas ramas de las matemáticas, como por ejemplo el álgebra, el análisis matemático o el cálculo de probabilidades. Además, muchas ciencias modernas utilizan las matemáticas con mayor o menor profusión: la estadística, la economía, la química o la ecología. Existe en la actualidad una tabla de clasificación, que se modifica continuamente, de las disciplinas que son consideradas parte de las matemáticas: todas ellas comparten ese modo seguro de avanzar en el conocimiento que les garantiza la posibilidad de *demostrar* todas sus afirmaciones.

Escribiendo los *Elementos*, Euclides recopiló gran parte de los conocimientos de geometría y de aritmética acumulados durante los siglos V y IV a.C., exponiéndolos según el estilo característico de las matemáticas griegas. Recogiendo los resultados obtenidos por quienes lo habían precedido, su obra representó el modelo para los autores griegos posteriores, contribuyendo así a consolidar la idea misma de lo que son las matemáticas.

Un instrumento eficaz de persuasión: la demostración geométrica

El método de la demostración no nació de un día para otro; existió sin duda un proceso de elaboración, del que tenemos pocas noticias debido a la escasez de las obras conservadas. Tales o Pitágoras, que vivieron en el siglo VI a.C., probablemente no escribieron nunca de matemáticas; sobre su efectiva labor matemática mucho se discute. El primer fragmento de un escrito matemático del que tenemos noticia es de Hipócrates de Quíos, que vivió en la segunda mitad del siglo V a.C.; en realidad, el fragmento en cuestión aparece citado en una obra escrita mil años después (en el siglo VI d.C.) por un autor llamado Simplicio.

Hipócrates y la cuadratura de las lúnulas

Las figuras examinadas por Hipócrates son las lúnulas, es decir, figuras planas curvilíneas (limitadas por segmentos de líneas curvas) en forma de luna: una lúnula está limitada por dos arcos de circunferencia (Fig. 1). El problema que se planteaba era el siguiente: ¿existe un cuadrado de área igual al área de la lúnula?

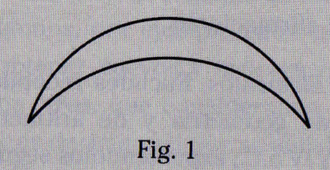


Fig. 1

Encontrar un cuadrado de la misma área que una figura plana dada es lo que se llama cuadrar la figura, o se habla también de obtener su cuadratura. Cuadrar una figura rectilínea, es decir, una figura limitada por segmentos de línea recta, como el triángulo o el rectángulo, es un problema más sencillo que el que abordó Hipócrates. Un ejemplo muy sencillo es el de un triángulo rectángulo isósceles (con un ángulo recto y dos catetos iguales, Fig. 2). Su área es la mitad del área del cuadrado que se obtiene uniendo un triángulo igual por la hipotenusa; pero el área de este cuadrado es el doble que la del cuadrado de lado la mitad de la hipotenusa, como se deduce del teorema de Pitágoras. Tales cuadraturas se pueden resolver con procedimientos consistentes en cortar y pegar figuras geométricas, y probablemente eran conocidos desde mucho tiempo antes, al igual que el teorema de Pitágoras. Estos conocimientos formaban parte de la tradición matemática práctica.

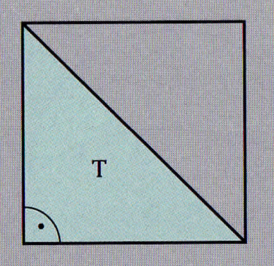


Fig. 2

En los Elementos, *Euclides demuestra el teorema de Pitágoras y prueba que, siguiendo una serie de pasos, se puede llegar a cuadrar cualquier figura rectilínea.*

Pero volvamos a las lúnulas de Hipócrates; el caso más simple es el de una lúnula que tiene como arco externo una semicircunferencia (Fig. 3). Para poder razonar sobre esta figura, Hipócrates la coloca en una configuración más complicada que le permite ponerla en relación con otras figuras. Se considera un triángulo rectángulo isósceles inscrito en un semicírculo: el semicírculo queda así descompuesto en tres partes, un triángulo T y dos segmentos circulares iguales S (Fig. 4). Sobre la hipotenusa del triángulo se construye un segmento circular R semejante a los dos segmentos circulares pequeños (Fig. 5): ahora se puede considerar el semicírculo descompuesto de otra manera, en dos figuras: la lúnula L y el segmento circular R (Fig. 6).

La lúnula aparece así en una configuración que la relaciona con un triángulo rectángulo, lo cual hace posible aplicar el teorema de Pitágoras: el teorema relaciona entre sí los cuadrados de los tres lados del triángulo, es decir, de las bases de los tres segmentos circulares (Fig. 7)

$$r^2 = s^2 + s^2$$

>>

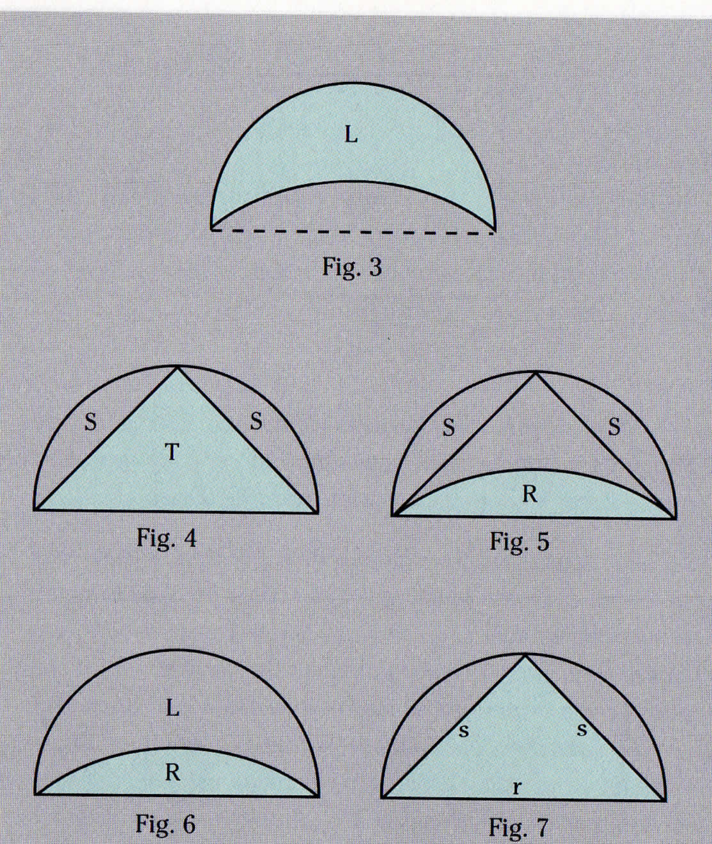


Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5 Fig. 6 Fig. 7

Simplicio recuerda que, para poder cuadrar la lúnula, Hipócrates necesitaba usar un resultado previo, pero no describe cómo demostraba este lema (como se suele decir hoy en matemáticas de las proposiciones que sirven de base para demostrar un teorema). Este resultado, que se refiere a segmentos circulares semejantes -como los que aparecen en nuestra configuración-, afirma que existe una relación de proporcionalidad entre sus áreas y los cuadrados de las longitudes de sus bases:

"Segmentos circulares semejantes están entre sí en la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus bases".

Para entenderlo mejor, podemos usar la escritura simbólica moderna, que no existía en tiempos de los griegos, pero que actualmente nos facilita la comprensión. La proporción que existe es la siguiente:

$$\frac{R}{S} :: \frac{r^2}{s^2}$$

donde las letras r y s representan la longitud de las bases y R y S las áreas de los segmentos circulares.

Del teorema de Pitágoras, combinado con esta relación de proporcionalidad, deducimos una información importante sobre la configuración: el área del segmento circular mayor es igual a la suma de las áreas de los segmentos circulares menores. Si ahora comparamos la primera descomposición (Fig. 4) con la segunda (Fig. 6) observamos que el área de la lúnula L equivale al área del triángulo T. Pero hemos visto antes que es fácil encontrar un cuadrado Q de área igual al área de T: luego el área de la lúnula es igual al área del cuadrado Q, y se ha cuadrado la lúnula.

De esta manera, Hipócrates lograba convencer, con un razonamiento muy persuasivo, de la verdad de una afirmación curiosa y paradójica: una figura curvilínea era igual a una figura rectilínea. Todos estos ingredientes garantizaban un éxito seguro entre los griegos. Aunque todo lo que sabemos sobre la labor de Hipócrates se reduce a éste y a otros tres tipos de lúnulas que logró cuadrar, reportadas por Simplicio, podemos observar ya aquí algunos aspectos típicos de las matemáticas griegas que se podrán de manifiesto con toda evidencia en la obra de Euclides:

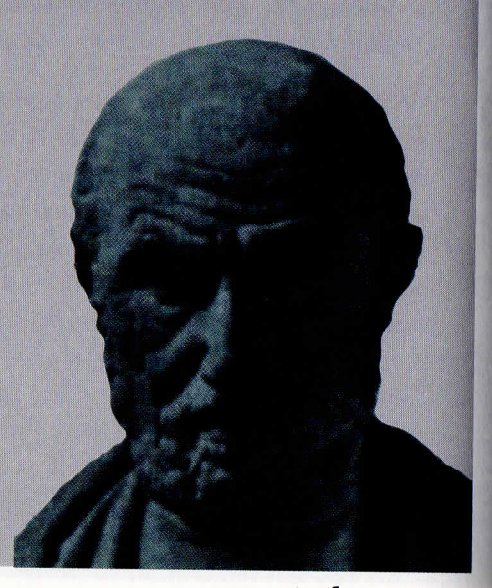
- *el procedimiento de demostración por medio del encadenamiento de resultados cada vez más ricos en información,* >>

• *la importancia de la teoría de la proporcionalidad entre magnitudes,*

• *la aparición de algunos problemas particularmente llamativos, como la cuadratura de las lúnulas, o el problema de la cuadratura del círculo,*

• *y, en fin, el hecho de que las matemáticas griegas no son unas matemáticas con fórmulas como es habitual en nuestra época. La idea de utilizar letras para representar las cantidades incógnitas o las variables, bien sea en problemas de geometría o en la teoría de las proporciones y muchos otros, se introdujo mucho más tarde: los textos matemáticos griegos exponen los resultados por medio de un razonamiento desarrollado exclusivamente con palabras, usando eso sí figuras, y empleando letras para designar los puntos o las rectas.*

De la misma manera, en el lema antes citado que Hipócrates aplica se usa la expresión: "el cuadrado construido sobre el segmento r", en vez de escribir r^2 : de aquí se deriva la expresión al cuadrado *que se sigue utilizando para indicar una cantidad multiplicada por sí misma, como herencia de unas matemáticas en las que la geometría ocupaba un lugar privilegiado.*



Hipócrates de Quíos

Teniendo en cuenta el tiempo pasado se comprende que nuestra información sobre el nacimiento de las matemáticas es muy pobre; pero basándonos en lo que nos refiere Simplicio, se puede afirmar que en Hipócrates se comienza a vislumbrar un modo de argüir sobre una figura típico de la geometría griega. Se trata de un razonamiento que combina las ideas que provienen de la atenta observación de la figura particular con una deducción rigurosa y que permite, a través de una serie de pasos lógicos, llegar a la conclusión de que la propiedad de la figura es válida en general para otras figuras análogas.

Este método, la demostración matemática, y sobre todo la demostración geométrica como ejemplo principal, despertó un gran interés entre los griegos, que reconocieron en él una capacidad de convencer y de llegar a la verdad muy superior a la de cualquier otro tipo de razonamiento. La palabra escrita, que Sócrates consideraba inferior a la discusión oral como medio para argumentar y obtener conclusiones, en este caso resultaba esencial y propiciaba la elaboración de un razonamiento incontestable, o, dicho con una palabra de origen griego, apodíctico (*apódeixis* es la palabra griega que indica la demostración).

La contribución de muchos otros matemáticos permitió perfeccionar cada vez más este procedimiento. Seguramente existieron diferencias de punto de vista entre diversos autores, distintas ideas sobre cómo proceder en una demostración, así como sobre la importancia relativa y la relación entre las varias *mathemata*. Los *Elementos* de Euclides pueden ser considerados la expresión de un acuerdo al respecto alcanzado ya a finales del siglo IV a.C., así como de la preeminencia obtenida por la geometría. De hecho, esta obra sirvió en adelante para los matemáticos griegos como:

1) ejemplo del modo de proceder en el desarrollo de una teoría matemática;

2) modelo del modo de razonar y de demostrar matemáticamente;

y 3) compendio de resultados, de verdades matemáticas aceptadas que podían servir para seguir progresando en el conocimiento matemático.

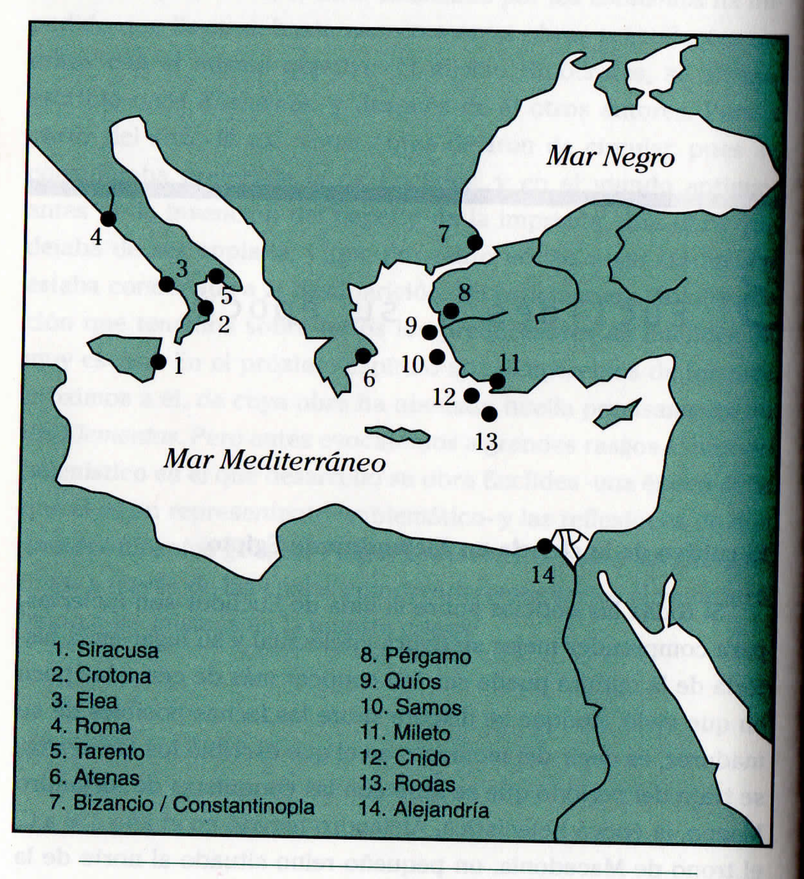
Paradójicamente, el éxito alcanzado por los *Elementos* ha impedido que llegaran hasta nosotros otras obras precedentes escritas con el mismo objetivo. El mismo Hipócrates, se afirma, escribió unos *Elementos*, y después de él otros autores. Pero a partir del siglo III a.C. estas obras dejaron de circular, pues se consideraba preferible la de Euclides, y en el mundo antiguo, antes de la invención del papel y de la imprenta, una obra que dejaba de ser copiada, y que por tanto no iba a ser traducida, estaba condenada a la desaparición. De esta manera, la información que tenemos sobre todos los predecesores de Euclides es muy escasa. En el próximo capítulo nos ocuparemos de los más próximos a él, de cuya obra ha quedado huella precisamente en los *Elementos*. Pero antes evocaremos a grandes rasgos el mundo helenístico en el que desarrolló su obra Euclides -una época de la que él es un representante emblemático- y las reflexiones de dos grandes filósofos griegos, Platón y Aristóteles, sobre las matemáticas, a través de las cuales comprenderemos mejor el valor atribuido a las mismas en la cultura griega.

3 Euclides y su época

El cultivo de la ciencia en Alejandría de Egipto

Si todas las noticias sobre la vida de Euclides son inciertas, para comprender mejor su figura intelectual y su lugar en la historia de la cultura puede ser útil conocer más de cerca la época en que vivió. Aunque se discute sobre las fechas posibles de su madurez, es decir del momento en el que escribió los *Elementos*, se trata del periodo que se abre con las conquistas de Alejandro Magno, la época helenística. Alejandro heredó en el año 336 a.C. el trono de Macedonia, un pequeño reino situado al norte de la península griega, y emprendió un audaz proyecto de expansión. El imperio de Alejandro fue efímero desde el punto de vista político, pues se disgregó a su muerte en el año 323; pero hizo posible que la influencia de la cultura griega se extendiera, mucho más allá de las ciudades-estado griegas y sus colonias comerciales, a todo el Mediterráneo y el cercano Oriente. La filosofía, la literatura y la ciencia griegas se incorporaron así al patrimonio cultural del Imperio Romano cuando éste amplió progresivamen-

te su dominio a toda esta área geográfica. Si en la parte occidental del Imperio Romano se hablaba latín, en la parte oriental el griego era la lengua culta por excelencia, y se mantuvo como tal durante la época medieval.



Algunas ciudades del Mediterráneo en las que trabajan los matemáticos griegos.

Durante la época helenística, Atenas siguió siendo el centro de las discusiones filosóficas. Sin embargo, en muchas otras capitales de las monarquías en las que se fragmentó el imperio de Alejandro, los reyes procuraron atraer a literatos, filósofos y eruditos griegos para crear una vida cultural semejante a la que

admiraban en Atenas y aumentar de esta manera el propio prestigio. En Alejandría, en Pérgamo y en Rodas fueron creadas bibliotecas bajo el patrocinio real. Alejandría había sido fundada por Alejandro Magno en Egipto en el 332 a.C. y, tras su muerte, se convirtió en la capital de la monarquía de los ptolomeos. Uno de los consejeros del rey Ptolomeo I (conocido también como Ptolomeo I Soter) era Demetrio Falereo, que había gobernado Atenas durante diez años y, tras su expulsión en el 307, había encontrado refugio en la corte de Alejandría. Es posible que fuera él quien sugiriera al rey que creara una institución, dotada de una buena biblioteca, que pudiera acoger a filósofos y eruditos de todos los saberes, siguiendo el ejemplo del Liceo de Atenas, la institución donde se reunían los seguidores de Aristóteles.

Ptolomeo I hizo construir en el palacio real de Alejandría un Museo, es decir, una casa dedicada a las Musas, diosas que inspiran según la mitología griega los distintos saberes. En el Museo los *philólogoi* (estudiosos) gozaban de un ambiente apropiado para el estudio, la meditación y la discusión. La actividad de esta institución se mantuvo durante muchos siglos, incluso tras la conquista de Alejandría por los romanos. Según la descripción del geógrafo e historiador Estrabón, que residió en la ciudad en el siglo I a.C., el Museo, como el Liceo de Atenas, tenía un paseo, un lugar de reunión al aire libre y un edificio donde había un comedor común, además de una gran biblioteca. La biblioteca de Alejandría llegó a ser la más



El faro de Alejandría en un grabado antiguo.

amplia del mundo antiguo: en la época de Estrabón contenía más de 700.000 rollos, que correspondían a miles de obras, tanto obras griegas originales escritas por autores de distintas épocas y procedencias geográficas, como traducciones al griego de obras de otras culturas, como por ejemplo la *Biblia* judía. Los reyes de la dinastía de los ptolomeos tenían en gran consideración gozar de buena reputación (*philódoxoi*) y eran amantes de la técnica (*philótechnoi*). Así, el patrocinio real permitió que en Alejandría se desarrollaran los estudios de medicina, astronomía y geografía, y que se ensayaran diversas máquinas e ingenios técnicos, especialmente de utilidad bélica. Todos estos saberes y artes podían resultar de utilidad práctica para el rey (la aplicación más importante de la astronomía era la elaboración de predicciones astrológicas). Ahora bien, en el Museo se cultivaron también los estudios de tipo teórico, como la geometría.

La ciencia griega había alcanzado ya en aquella época un alto grado de desarrollo. Más de dos siglos de discusión y reflexión sobre una gran cantidad de problemas relativos a la naturaleza, al cosmos y al lugar en él del hombre, iniciados en el siglo V a.C., habían llevado a la articulación de disciplinas especializadas (*epistemai*) y a la creación de un gran patrimonio de obras escritas sobre medicina, astronomía, geometría, música, geografía y física, esta última entendida como estudio de la naturaleza (en griego *phýsis*) en todos sus aspectos, incluyendo por lo tanto el mundo viviente. Existía una amplia discusión filosófica sobre la naturaleza del saber humano, la relación entre las varias disciplinas y su clasificación. Se sentía la necesidad de obras de síntesis que expusieran ordenadamente las diversas materias desde sus primeros principios para facilitar así la transmisión y la conservación de los conocimientos adquiridos. En el campo de las matemáticas, la exigencia de recoger la tradición en una obra que pudiera servir de fundamento y de estímulo para el desarrollo futuro encontró su mejor respuesta en la labor de Euclides y en su gran proyecto intelectual, los *Elementos*.

Las matemáticas gozaban de un lugar preeminente en el conjunto de las disciplinas, debido sobre todo a la influencia de las ideas de Platón (428 a.C.-347 a.C.). También Aristóteles (384-322 a.C.) examinó con atención la originalidad y el valor del conocimiento matemático. Estos autores forman parte del contexto cultural en el que desarrolló su labor Euclides.

El valor de las matemáticas: las ideas de Platón

Platón fue una figura estelar de la cultura griega en la primera mitad del siglo IV a.C. y el impacto de sus ideas fue mucho más allá de su época: su pensamiento es uno de los pilares de la cultura occidental. Su concepción de las matemáticas es uno de los muchos aspectos de su pensamiento que ha tenido una influencia duradera. En primer lugar, Platón considera que las matemáticas han de ser el fundamento de la educación del hombre culto, y especialmente del futuro gobernante, según expone en su diálogo sobre la justicia y el gobierno, la *República*; y no porque se trate de un conocimiento útil, sino por que sirven para preparar a la filosofía, que es el saber más alto. La opinión según la cual las matemáticas son la mejor base de la formación de los jóvenes se fue difundiendo desde entonces; y precisamente los *Elementos* de Euclides han sido hasta épocas muy recientes la obra principal de referencia para la enseñanza de las matemáticas. Veamos cómo Platón defiende esta idea. Según él, es necesario distinguir el saber o conocimiento verdadero de la mera opinión. Sobre las cosas materiales que percibimos a través de los sentidos, que se manifiestan en una gran variedad de modos y se modifican continuamente, no es posible el conocimiento verdadero; el conocimiento se refiere a las ideas abstractas, que existen independientemente y cuyo reflejo son las cosas sensibles: así, la idea de triángulo, una figura rectilínea formada por tres lados, es independiente de los múltiples triángulos diferentes que podemos dibujar y de las cosas que podemos ver, naturales o artificiales, con forma triangular.

El valor de la geometría

En un conocido pasaje de la República, *los protagonistas, Glaucón y Sócrates, se refieren a la conveniencia de la geometría en la educación, en vista de la acción y sobre todo en vista del conocimiento:*

[Glaucón] "En cuanto se extiende sobre los asuntos de guerra, es evidente que conviene. Porque en lo que concierne a acampamientos, ocupación de zonas, concentraciones y despliegues de tropas, y cuantas formas asuman los ejércitos en las batallas mismas y en las marchas, es muy diferente que el guardián mismo sea geómetra y que no lo sea.

[Sócrates] De esas cosas, sin embargo -repliqué- es poco de geometría y de cálculos lo que basta. Avanzando mucho más lejos que eso, debemos examinar si tiende a hacer divisar más fácilmente la Idea del Bien. Y a eso tiende, decimos, todo aquello que fuerza al alma a girar hacia el lugar en el cual se halla lo más dichoso de lo que es, que debe ver a toda costa.

Hablas correctamente.

En ese caso, si la geometría obliga contemplar la esencia, conviene; si en cambio obliga a contemplar el devenir, no conviene.

De acuerdo en que afirmemos eso.

En esto hay algo que no nos discutirán cuántos sean siquiera un poco expertos en geometría, a saber, que esta ciencia es todo lo contrario de los que dicen en sus palabras los que tratan de ella.

¿Cómo es eso?

Hablan de un modo ridículo aunque forzoso, como si estuvieran obrando o como si todos sus discursos apuntaran a la acción: hablan de 'cuadrar', 'aplicar', 'añadir', y demás palabras de esa índole, cuando en realidad todo este estudio es cultivado apuntando al conocimiento.

Completamente de acuerdo.

¿No habremos de convenir algo más?

¿Qué?

Que se la cultiva apuntando al conocimiento de lo que es siempre, no de algo que en algún momento nace y en algún momento perece.

Eso es fácil de convenir, pues la geometría es el conocimiento de lo que siempre es.

Se trata entonces, noble amigo, de algo que atrae el alma hacia la verdad y que produce que el pensamiento del filósofo dirija hacia arriba lo que en el presente dirige indebidamente hacia abajo.

Es capaz de eso al máximo.

Pues si es tan capaz, has de prescribir al máximo a los hombres de tu bello Estado que de ningún modo descuiden la geometría; pues incluso sus productos accesorios no son pequeños.

¿A qué te refieres?

Lo que tu has mencionado: lo concerniente a la guerra; pero también con respecto a todos los demás estudios, cómo comprenderlos mejor, ya que bien sabemos que hay una enorme diferencia entre quien ha estudiado geometría y quien no.

¡Enorme, por Zeus!

¿Implantamos entonces esto como un segundo estudio para nuestros jóvenes?

Implantémoslo".

Platón, *República*, Libro VII (526d-e, 527a-c).
Traducción de Conrado Eggers Lan, *Diálogos IV*, Gredos, 1986.

Los conceptos de la aritmética o de la geometría proporcionan así a Platón una pista fundamental en su manera de concebir el conocimiento humano. Por supuesto, como él mismo recuerda, se refiere a las matemáticas no como conjunto de *herramientas* útiles en operaciones de recuento, de medición o de organización, sino tal y como se han comenzado a estudiar entre los griegos, esto es, como reflexión sobre las propiedades generales de números y figuras.

En la *República*, describe el modo de proceder característico de la geometría, desde las primeras premisas o hipótesis recorriendo todos los pasos intermedios del razonamiento hasta llegar a la conclusión buscada; y realizando esta deducción con el auxilio de figuras, pero sin limitarse a la figura concreta, que se dibuja únicamente para evocar la figura abstracta que puede ser concebida sólo con el pensamiento.

Según Platón, existe un punto débil en los razonamientos matemáticos debido a que se manejan nociones abstractas que se dan como supuestas porque se basan sobre ideas intuitivas y que por tanto están ligadas al mundo físico. Euclides intentará en sus *Elementos* resolver este escollo proponiendo definiciones de

Las ideas matemáticas

[Sócrates] "[...] Creo que sabes que los que se ocupan de geometría y de cálculo suponen lo impar y lo par, las figuras y las tres clases de ángulos y cosas afines, según lo que investigan en cada caso. Como si las conocieran, las adoptan como supuestos [hypotheseis], *y de ahí en adelante no estiman que deban dar cuenta de ellas ni a sí mismos ni a otros, como si fueran evidentes a cualquiera; antes bien, partiendo de ellas atraviesan el resto de modo consecuente, para concluir en aquello que proponían al examen.*

[Glaucón] Sí, esto lo sé.

Sabes, por consiguiente, que se sirven de figuras visibles y hacen discursos acerca de ellas, aunque no pensando en éstas sino en aquellas cosas a las cuales éstas se parecen, discurriendo en vista al Cuadrado en sí y a la Diagonal en sí, y no en vista de la que dibujan, y así con lo demás. De las cosas mismas que configuran y dibujan hay sombra e imágenes en el agua, y de estas cosas que dibujan se sirven como imágenes, buscando divisar aquellas cosas en sí que no podrían divisar de otro modo que con el pensamiento.

Dices verdad.

A esto me refería como la especie inteligible. Pero en esta su primera sección, el alma se ve forzada a servirse de supuestos en su búsqueda, sin avanzar hacia un principio, por no poder remontarse más allá de los supuestos. Y para eso usa como imágenes a los objetos que abajo eran imitados, y que habían sido conjeturados y estimados como claros respecto de los que eran sus imitaciones.

Comprendo que te refieres a la geometría y a las artes afines.

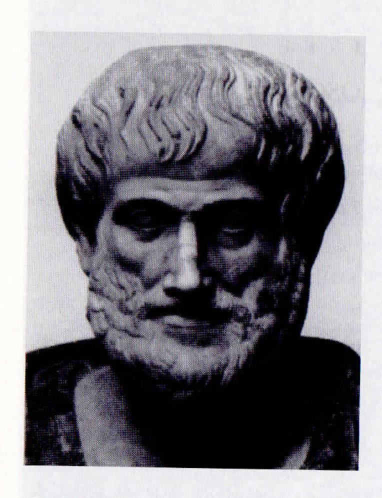
[...]

[Glaucón] [...] Y creo que llamas 'pensamiento discursivo' [diánoia] *al estado mental de los geómetras y similares, pero no 'inteligencia'* [nous]; *como si el 'pensamiento discursivo' fuera algo intermedio entre la opinión* [dóxa] *y la inteligencia".*

Platón, *República*, Libro VI (510c-e, 511a-b, 511d).
Traducción de Conrado Eggers Lan, *Diálogos IV*, Gredos, 1986.

muchos de estos conceptos matemáticos, desde los más simples, como el punto o la recta (los más difíciles de definir), y avanzando progresivamente hacia los más complicados, como ángulo, figura rectilínea y así sucesivamente. La discusión sobre la naturaleza de los *objetos* matemáticos ha hecho correr ríos de tinta durante muchos siglos: las ideas matemáticas ¿son una invención humana?, ¿o bien existen por sí mismas y los hombres se limitan a descubrirlas? Todavía hoy se llama *platónicos* a aquellos matemáticos que creen que las ideas matemáticas tienen una existencia independiente y que consideran que la labor del estudioso es la de explorar un mundo lleno de mil lugares que aún no han sido visitados por el hombre.

Aristóteles: matemáticas, experiencia, deducción lógica



Aristóteles

Aristóteles, discípulo de Platón y preceptor de Alejandro Magno, es una figura destacada de la cultura griega de la segunda mitad del siglo IV a.C. Su opinión sobre las matemáticas se distancia de la de Platón, pues según él no existen objetos matemáticos separados e independientes, sino que los conceptos de las matemáticas proceden de los cuerpos materiales por abstracción. Así, el matemático abstrae las propiedades físicas concretas de un objeto físico y de esta manera llega a las propiedades matemáticas que le compete estudiar.

Aristóteles se interesó por muchas cuestiones filosóficas pero también se ocupó de problemas que podemos llamar científicos,

Las relaciones entre las disciplinas

"Sin embargo, el saber por qué subsiste una proposición difiere del saber que ella subsiste en otro sentido, en cuanto cada una de estas cosas puede ser conseguida mediante una ciencia diferente. Esto sucede, por otra parte, cuando una proposición de una cierta ciencia está, respecto a otra ciencia, en una relación de subordinación, como la que existe, por ejemplo, entre las proposiciones de óptica y la geometría, entre las proposiciones de mecánica y la estereometría, entre las proposiciones de teoría de la música y la aritmética, entre las proposiciones que expresan datos de observación y la astronomía matemática. Algunas de estas ciencias, además, son por así decir sinónimas. Por ejemplo, se da el nombre de astronomía tanto a una ciencia matemática como a una ciencia náutica, y se da el nombre de teoría de la música tanto a una ciencia matemática cuanto a una ciencia fundada sobre el oído. En realidad, en todos estos casos el saber que una cosa es corresponde a los observadores de lo que cae bajo los sentidos, mientras que el saber por qué una cosa es corresponde a los sentidos."

Aristóteles, *Analíticos segundos*, I (A), 13, 78b 36-79a

como el movimiento de los cuerpos o la variedad de los seres vivos. Examinó también la clasificación de las disciplinas científicas y las relaciones entre ellas. Así, por ejemplo, indicó la relación entre la acústica, que estudia el sonido (cómo se produce y cómo se transmite), la música (el estudio de los sonidos armónicos) y la aritmética, sobre la que se basa el estudio de la armonía; o entre la óptica

y la geometría, pues las propiedades de la línea geométrica sirven para entender mejor las propiedades del rayo visual.

Pero cada disciplina debía mantener su autonomía y el conjunto de conocimientos pertenecientes a cada una de las ciencias debía ser reconstruido deductivamente a partir de unos "primeros principios" referentes al objeto sobre el que versan, los cuales correspondían a los "elementos" que los especialistas de cada disciplina procuraban establecer claramente.

Aristóteles, además, escribió sobre lógica y sobre las formas del conocimiento humano y en particular analizó los principios de lo que es un razonamiento correcto, de lo que es una demostración. En sus obras recurre a menudo a ejemplos tomados de las disciplinas matemáticas de su época. Los estudiosos activos en distintos campos del saber confrontaban sus puntos de vista, y las matemáticas constituyeron un elemento esencial en la gran aportación de los griegos a la comprensión de la naturaleza de un discurso racional y de la estructura de los diferentes campos del saber.

Los matemáticos del siglo IV

Si la lectura de Platón y Aristóteles nos permite comprender mejor cómo se forjó a lo largo del siglo IV a.C. la idea de lo que hoy llamamos matemáticas, poco sabemos de la labor de los matemáticos activos en esta época, de los temas que investigaron, de los resultados que obtuvieron o de las obras que escribieron.

Uno de los primeros autores que al parecer indicó explícitamente la existencia de un grupo de disciplinas *hermanas* fue Arquitas, que vivió en la misma época que Platón y al que debió de conocer. Arquitas pertenecía al grupo de los pitagóricos, famoso por su carácter secreto, que atribuía a la relación entre las propiedades de los números y la armonía musical un papel central en la búsqueda de explicaciones de la esencia del Universo. Efectivamente Arquitas escribió sobre música, aunque, como en el caso de Hipócrates, el único fragmento de un escrito matemático suyo que conservamos es en realidad una cita que aparece en una obra escrita mil años después, esta vez por Eutocio.

La historia de la geometría de Eudemo

La información histórica de la que disponemos sobre los matemáticos griegos de los siglos V y IV a.C. y sobre el propio Euclides procede en realidad de fuentes muy posteriores, es decir, de obras escritas varios siglos después de la muerte de estos autores. Son las obras de Proclo (del siglo V d.C.), de Eutocio y de Simplicio (ambos del siglo VI d.C.)

En realidad, lo que afirman Proclo, Eutocio y Simplicio en sus respectivas obras fue tomado por ellos de un libro escrito en el siglo IV a.C. que habían podido consultar pero del que no se conserva ninguna copia. Se trata de una obra dedicada a la historia de la geometría griega escrita por Eudemo, un discípulo de Aristóteles. Eudemo, por lo tanto, era coetáneo de Euclides y podía disponer de información de primera mano para escribir su trabajo: por este motivo suele ser considerado una fuente de información fiable.

Amigo de Platón -que lo cita en algunos de sus diálogos- fue otro matemático del que tenemos noticia, el ateniense Teeteto. Pero el matemático más importante del siglo IV, mencionado con enorme respeto por Arquímedes, fue Eudoxo de Cnido. Eudoxo desempeñó, como Arquitas, un papel político importante en su ciudad natal y se dice que redactó una constitución. Representa de manera ejemplar la figura del ciudadano griego libre: activo en política y a la vez estudioso, se dice que viajó mucho y que conocía muy bien Egipto. Es famoso sobre todo como matemático y como astrónomo, pero Aristóteles lo menciona también por sus planteamientos en ética, criticando su posición hedonista.

Algo más tarde vivió Menecmo, que al parecer investigó un tema central para la geometría griega, las cónicas. Y poco más joven que él era Autólico de Pitania, contemporáneo de Aristóteles, el primer matemático griego del cual se conservan obras originales. Se trata de dos tratados de astronomía estudiada con técnicas geométricas o, dicho más exactamente, de una disciplina conocida como esférica. A estos estudios, iniciados ya por Eudoxo, está dedicada una obra de Euclides titulada *Fenómenos* (hablaremos de ella más adelante). Contemporáneo de Euclides pudo ser Aristeo, autor de un tratado hoy perdido sobre los sólidos regulares, el tema del último libro de los *Elementos*.

Mathematikós

Hemos afirmado al principio de este libro que podíamos legítimamente decir que Euclides era un matemático, pues en Grecia existía esta palabra, mathematikós. *Los pitagóricos usaban este término todavía en un sentido más general para referirse a aquel que poseía el conocimiento, distinguiéndolo del* akusmatikós, *que se limitaba a escuchar las enseñanzas. Cuando se empezó a hablar de* mathemata *para delimitar un conjunto de disciplinas que se acercan a lo que hoy entendemos por matemáticas,* mathematikós *pasó a designar a la persona versada en ellas.*

Aun así, existen diferencias con el significado actual de esta palabra. Por ejemplo, a menudo eran llamados matemáticos los astrólogos, pues para preparar un horóscopo, es decir, para determinar la posición de los planetas en el momento del nacimiento de una persona, era necesario efectuar cálculos matemáticos. El trabajo de astrólogo era seguramente una ocupación bastante segura y remunerativa. Menos ventajas debía tener limitarse a ofrecer los servicios de profesor, aunque también era una actividad más respetada, pues no faltaba quien ya entonces criticaba a la astrología acusándola de pura superstición.

Aunque las matemáticas sean un saber muy antiguo, no ha existido una profesión de matemático, comparable a las de médico o abogado, hasta épocas muy recientes. Algunos estudiosos eran simplemente profesores o preceptores, o eran llamados a la corte de reyes y nobles amantes del saber. Estudiaban matemáticas personas que se ganaban la vida precisamente como médicos o abogados (como el famoso Fermat), y también miembros de órdenes religiosas (entre ellos muchos jesuitas), militares o ingenieros. Por otra parte, a menudo eran llamados matemáticos quienes se ganaban la vida como topógrafos, ingenieros o mecánicos, pues la actividad técnica parecía presuponer algunos conocimientos de matemáticas. A menudo, sin embargo, su base matemática era pobre y estos oficios se desempeñaban gracias a la experiencia práctica. Por ello, la palabra matemático se llegó a teñir de un valor despreciativo, y quien conocía de verdad las matemáticas prefería definirse geómetra.

La fama de Teeteto y de Eudoxo ha llegado hasta nosotros a través de los comentarios de otros autores, pero no se conserva ninguna de sus obras. Como consecuencia, la información que poseemos sobre su trabajo es muy escasa, aunque diversos indicios permiten suponer que partes importantes de los *Elementos* de Euclides recogen en realidad teorías elaboradas por ambos: en el caso de Eudoxo, la teoría de las proporciones que está expuesta en el Libro V de los *Elementos* y los procedimientos de medida típicos del Libro XII; en el caso de Teeteto, la teoría de la inconmensurabilidad, expuesta en el Libro X, el más complejo de los *Elementos*, y la clasificación de los poliedros regulares presenta-

da en el Libro XIII, el último. Dicho de otro modo, probablemente en los libros citados la labor de Euclides consistió principalmente en exponer ordenadamente un cuerpo teórico (o sea, un conjunto de resultados homogéneo que desarrolla un tema de investigación matemática de manera muy completa) que había sido elaborado por alguno de sus antecesores. En estos casos, pudo introducir mejoras en la sucesión de resultados, bien desde el punto de vista de la simplicidad o de la fuerza de las demostraciones. Así, puesto que no se han conservado escritos originales de los dos grandes autores citados del siglo IV, hemos de recurrir a los *Elementos* para intentar conocer mejor su pensamiento matemático. Los *Elementos* son, por tanto, una fuente que nos permite acercarnos a los orígenes mismos de las matemáticas en Grecia.

4 Los trece libros de los *Elementos*

Los *Elementos* constituyen una obra muy compleja con una estructura lógica articulada. Están divididos en trece libros (los libros XIV y XV, que se han atribuido a Euclides, son en realidad de otros autores, hablaremos de ellos en el capítulo 5). Ocho de estos libros están dedicados a la geometría: los libros I, II, III, IV y el Libro VI a la geometría plana, y los libros XI, XII y XIII a la geometría del espacio o geometría sólida. Tres de ellos están dedicados a la aritmética (libros VII, VIII y IX). En fin, el Libro V está dedicado a la teoría de la proporción y el Libro X a la clasificación de las rectas irracionales.

Entre bastidores aparece claramente el proyecto intelectual que animó la redacción de este imponente tratado de matemáticas. El objetivo de Euclides era reunir en una obra el conjunto de conocimientos fundamentales que los matemáticos griegos habían acumulado hasta entonces, exponiéndolos de manera sistemática.

Los trece libros de los *Elementos*

Geometría plana	Libro I	Figuras rectilíneas
	Libro II	Relaciones entre magnitudes geométricas planas Método de aplicación de áreas
	Libro III	Figuras circulares: círculos y circunferencias
	Libro IV	Teoría de las figuras inscritas y circunscritas
Teoría de la proporción	Libro V	
Geometría plana	Libro VI	Aplicación de la teoría general de la proporción a la geometría plana
Aritmética	Libros VII-VIII-IX	
Teoría de la inconmensurabilidad	Libro X	Clasificación de las cantidades inconmensurables
Geometría del espacio	Libro XI	Figuras sólidas
	Libro XII	Relaciones entre magnitudes geométricas sólidas Método de exhaución
	Libro XIII	Poliedros regulares

Euclides intervino sobre la herencia cultural de las matemáticas griegas en dos direcciones. Por una parte, descartando conocimientos que consideraba *avanzados*, como por ejemplo los resultados relativos a las cónicas o los de cuadratura de las lúnulas (de los que se ocupa en otras obras, como veremos en el capítulo 5), y escogiendo los conocimientos *elementales*, en el sentido de que estaban firmemente asentados y de que constituían la base de las investigaciones actuales y futuras. Por otra, exponiendo estos conocimientos de manera ordenada, según una trama que facilitaba enormemente su estudio y que favorecía su utilización en ulteriores investigaciones para la búsqueda de nuevos resultados. Su operación refleja una visión de las matemáticas como un edificio que se apoya en cimientos muy robustos y se construye progresivamente siguiendo un método que es la garantía de su solidez. Este método, que guía el orden de los *Elementos* y la estructura del conjunto de las matemáticas, es el método deductivo.

La fuerza de convicción de la demostración geométrica, que permitía a los matemáticos garantizar la validez de sus afirmaciones, se extendía, de este modo, al conjunto de las matemáticas. En los *Elementos* se identifican y se exponen explícitamente los principios simples de los que parte el razonamiento matemático. Se trata, en primer lugar, de las definiciones de los objetos matemáticos y de las relaciones entre ellos. Además, existen algunos requerimientos o afirmaciones que deben ser aceptadas como tales y para las que no se presenta una demostración. Son los postulados y las nociones comunes, el núcleo duro que en definitiva permite iniciar a razonar matemáticamente. La solidez del edificio matemático se debe a que este núcleo duro puede ser identificado y a que cada resultado matemático puede ser obtenido gracias a un proceso deductivo que se basa sobre dichas premisas y sobre los resultados ya demostrados, en un encadenamiento lógico indiscutible.

El objetivo de la obra era, por lo tanto, doble. Por una parte, recopilaba un corpus de resultados: esto explica su uso como libro de texto en la enseñanza de las matemáticas, consagrado por la cultura europea medieval y mantenido durante siglos. Por otra, a través de sus páginas ofrecía un modelo del modo de demostrar los teoremas y del modo de construir una teoría matemática, presentando las ramas ya consolidadas. Las teorías que se abordan en esta obra se refieren a los entes o magnitudes geométricas, a los números y a las razones y proporciones. Estas teorías tienen entre sí profundas relaciones estructurales y de analogía. En los siglos sucesivos se fueron añadiendo nuevas teorías al corpus de las matemáticas, y nuevas y cada vez más ramificadas relaciones internas fueron siendo puestas a la luz.

Un principio ejemplar: el Libro I

La imagen de los *Elementos* más común entre los matemáticos y entre los profanos, a través de todas las épocas y hasta la actualidad, es la que se obtiene a través de la lectura del primer libro. El Libro I ha sido el más leído y estudiado: cuando, durante el Alto Medioevo, la matemática griega cayó casi completamente en el olvido en la Europa de lengua latina, entre las pocas cosas que seguían siendo accesibles se encontraban las páginas iniciales de este libro. Este destino particular del Libro I se debe en parte al hecho de que trata las cuestiones más simples de la geometría plana, relativas a figuras rectilíneas. La atención que ha recibido, sin embargo, no obedece sólo a su contenido, sino a la exposición clara y bien meditada. Se parte de algunas premisas simples y claramente especificadas, que constituyen los presupuestos del discurso matemático que se pretende desarrollar. Sobre esta base, las construcciones geométricas y los teoremas se encadenan siguiendo el método deductivo. Se trata de un libro bien acabado, ejemplar en muchos sentidos: por su eficacia desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas y porque representa el ideal del razonamiento matemático.

Euclides

El Libro I se abre con una lista de 23 definiciones, empezando por las de punto, línea y superficie, continuando con las de ángulo y las de las diferentes figuras planas y concluyendo con la definición de líneas rectas paralelas.

El Libro I de los Elementos*: las definiciones*

1. *Un punto es lo que no tiene partes.*
2. *Una línea es una longitud sin anchura.*
3. *Los extremos de una línea son puntos.*
4. *Una línea recta es lo que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.*
5. *Una superficie es lo que sólo tiene longitud y anchura.*
6. *Los extremos de una superficie son líneas.*
7. *Una superficie plana es aquella que yace por igual respecto de las líneas que están en ella.*
8. *Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta.*
9. *Cuando las líneas que comprenden el ángulo son rectas el ángulo se llama rectilíneo.*
10. *Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está.*
11. *Ángulo obtuso es el [ángulo] mayor que un recto.*
12. *Ángulo agudo es el [ángulo] menor que un recto.*
13. *Un límite es aquello que es extremo de algo.*
14. *Una figura es lo contenido por uno o varios límites.*
15. *Un círculo es una figura plana comprendida por una línea [que se llama circunferencia] tal que todas las rectas que caen sobre ella*

>>

desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí.

16. *Y el punto se llama* ***centro*** *del círculo.*

17. *Un* ***diámetro*** *del círculo es una recta cualquiera trazada a través del centro y limitada en ambos sentidos por la circunferencia del círculo, recta que también divide el círculo en dos partes iguales.*

18. *Un* ***semicírculo*** *es la figura comprendida entre el diámetro y la circunferencia por él cortada. Y el centro del semicírculo es el mismo que el del círculo.*

19. ***Figuras rectilíneas*** *son las comprendidas por rectas,* ***triláteras*** *las comprendidas por tres,* ***cuadriláteras*** *las comprendidas por cuatro,* ***multiláteras*** *las comprendidas por más de cuatro rectas.*

20. *De entre las figuras triláteras,* ***triángulo equilátero*** *es la que tiene los tres lados iguales,* ***isósceles*** *la que tiene sólo dos lados iguales, y* ***escaleno*** *la que tiene los tres lados desiguales.*

21. *Además, de entre las figuras triláteras,* ***triángulo rectángulo*** *es la que tiene un ángulo recto,* ***obtusángulo*** *la que tiene un ángulo obtuso,* ***acutángulo*** *la que tiene los tres ángulos agudos.*

22. *De entre las figuras cuadriláteras,* ***cuadrado*** *es la que es equilátera y rectangular,* ***rectángulo*** *es la que es rectangular pero no equilátera,* ***rombo*** *la que es equilátera pero no rectangular,* ***romboide*** *la que tiene los ángulos y lados opuestos iguales entre sí, pero no es equilátera ni rectangular; y llámanse* ***trapecios*** *las demás figuras cuadriláteras.*

23. *Son rectas* ***paralelas*** *las que estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos.*

Euclides, *Elementos*, Libro I.
Traducción de Mª Luisa Puertas Castaños, Gredos, 1991.

Hemos subrayado las palabras que son definidas; en muchas ocasiones el término que utilizamos hoy en día en castellano procede directamente de la palabra usada por los griegos y que aparece en los *Elementos*: por ejemplo las palabras *diámetro* (*diámetros* en griego), *centro* (*kéntron*), *isósceles* (*isoskelés*, que significa *de piernas iguales*), *escaleno* (*skalenós*, palabra que no se sabe bien de qué deriva, quizá del verbo *skáds*, que significa *cojear*, o de *skoliós*, que significa *torcido, defectuoso*).

Una vez introducidos los objetos geométricos y la relación de paralelismo, se enumeran cinco postulados o requerimientos, relativos a propiedades u operaciones geométricas. A continuación de ellos se enuncian cinco nociones comunes.

Estos presupuestos parecen evidentes, verdades intuitivas que no requieren demostración alguna: el autor de los *Elementos*,

El Libro I de los Elementos*: los postulados*

1. *Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.*

2. *Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta.*

3. *Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia.*

4. *Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.*

5. *Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los [ángulos] menores que dos rectos.*

Euclides, *Elementos*, Libro I.
Traducción de Mª Luisa Puertas Castaños, Gredos, 1991.

El Libro I de los Elementos*:*
las nociones comunes

1. Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.

2. Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales.

3. Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.

7. Y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.

8. Y el todo es mayor que la parte.

Euclides, *Elementos*, Libro I.
Traducción de Mª Luisa Puertas Castaños, Gredos, 1991.

Existen otras tres nociones comunes que aparecen en muchas ediciones de los Elementos *pero que, según los estudios filológicos modernos de la obra de Euclides, no aparecían en la versión original. Sobre la transmisión del texto de Euclides y las numerosas ediciones, resúmenes y traducciones hasta la edición más moderna, hablaremos en el siguiente capítulo.*

sin embargo, con gran sutileza, ha juzgado necesario indicarlos explícitamente. Se pone de manifiesto aquí la madurez alcanzada por una tradición de argumentación y discusión extremadamente sofisticada. En realidad, el quinto postulado contiene una afirmación mucho menos simple que todas las demás, y desde muy pronto se intentó obtener para él una demostración de manera que se convirtiera en una proposición.

Sigue a continuación la primera de un total de 48 proposiciones numeradas, cada una de ellas compuesta de un enunciado y

una demostración y acompañada por una figura a la que se refiere la demostración. Las proposiciones están dedicadas a las construcciones geométricas primordiales "con regla y compás" (construcción de un triángulo equilátero, construcción de un cuadrado a partir del lado, bisección de un ángulo o división de un segmento en dos partes iguales); a propiedades relativas a la igualdad "de la forma" (congruencia) entre triángulos; a las propiedades relativas a las paralelas, donde entra en juego el quinto postulado; y a la igualdad "de la extensión o contenido" (equivalencia) de triángulos, rectángulos y paralelogramos.

La estructura de los *Elementos*

La estructura del Libro I se repite en los libros sucesivos. Al inicio de cada libro, si es necesario, se introducen nuevas definiciones, hasta un total de 132. Estas se refieren a objetos matemáticos de diferente naturaleza y a las relaciones entre ellos y, además, introducen un principio de clasificación (en las del Libro I, por ejemplo, la clasificación de los ángulos y de las figuras). Así, al principio del Libro III figuran 11 definiciones relativas a círculos y circunferencias; con las definiciones de razón y de relación de proporcionalidad se inicia el Libro V; las definiciones sobre el número y las relaciones aritméticas encabezan el Libro VII, que inicia la parte aritmética de los *Elementos*; y el Libro XI, el primero de los tres dedicados a la geometría del espacio, comienza con las definiciones de las figuras sólidas. Tras las definiciones, siguen las proposiciones: los libros breves contienen alrededor de quince, la mayoría alrededor de treinta, y el más largo, el Libro X, más de cien, hasta un total, en el conjunto de la obra, de más de 450.

Existe así una analogía entre la organización de cada uno de sus cuerpos teóricos (geometría plana, geometría del espacio, aritmética, teoría de la proporción, teoría de la inconmensurabilidad) y su respectivo grupo de definiciones específicas (expuesto en uno o más libros). Existe también una analogía entre la estructura de cada uno de los trece libros. Existe, en fin, una analogía entre la estructu-

ra de cada una de las proposiciones de la obra, como veremos en seguida. Todas estas analogías dan un *ritmo* al discurso matemático que hace de los *Elementos* una obra clara y elegante. Este estilo límpido envuelve la riqueza y la complejidad del conjunto y de cada uno de los libros. En realidad, éstos están guiados por diferentes estrategias expositivas según el tema que tratan. A veces se puede identificar un objetivo preciso que parece guiar la elección de las proposiciones que forman un cierto libro; en algunos casos el libro se caracteriza porque existe un método que se aplica de manera sistemática en la demostración de las proposiciones; en otras ocasiones las proposiciones parecen estar reunidas agrupando los resultados disponibles sobre un tema, sin un rígido orden lógico o criterio de delimitación. El material recogido corresponde -según han podido deducir los historiadores- a épocas diferentes: probablemente en algunos casos había sido pensado y elaborado en profundidad por otros matemáticos, mientras que en otros era éste el primer intento de ordenar y exponer sistemáticamente las ideas sobre un tema.

Junto a las analogías y las diferencias que existen entre los libros considerados uno a uno, es necesario tener en cuenta que la obra presenta también una trabazón interna. Los libros se encadenan entre sí de manera que los postulados y nociones comunes introducidos en el Libro I son utilizados en otros libros; las definiciones introducidas en un libro pueden ser manejadas en los siguientes; y las proposiciones demostradas en un libro pueden ser aplicadas en la demostración de proposiciones de los libros siguientes. No se trata de un encadenamiento rígido, ni en el interior de los libros (donde existen grupos de proposiciones independientes entre sí) ni entre los trece libros. Así, por ejemplo, en el Libro IV se aplican resultados de los tres libros precedentes, pero *acaba allí*, puesto que sus proposiciones no vuelven a ser utilizadas. Los libros de aritmética dependen débilmente de los seis libros precedentes, y sus proposiciones se aplican a continuación sólo en el Libro X. A su vez, éste se aplica principalmente a las proposiciones del Libro XIII, pero sus dos primeras proposiciones se usan sólo en el Libro XII.

El orden elegido para introducir las proposiciones en cada uno de los libros, así como su organización general, se presta a discusiones sobre las posibles motivaciones que guiaban a Euclides, ya fueran de valor puramente matemático o bien relacionadas con las discusiones filosóficas y lógicas de la cultura griega o con otras implicaciones, incluso cosmológicas, de tipo pitagórico-platónico. Puesto que no han llegado hasta nosotros afirmaciones al respecto del autor, se trata sólo de hipótesis que no pueden recibir una confirmación inapelable. Indiscutible es más bien la impresión que transmite el conjunto de la obra, la de un imponente edificio, en particular el Libro I, que con su cuidadosa exposición de los principios básicos de esta construcción garantiza que los cimientos sean los más sólidos posibles.

La demostración geométrica

Las proposiciones de los *Elementos* son de dos tipos. Algunas son construcciones o, usando la terminología griega, *problemas*, y su enunciado comienza con palabras como *"Construir..."*, *"Dividir..."* o *"Trazar..."*. Se pide, por ejemplo:

> *"Dividir en dos partes iguales un ángulo rectilíneo dado"* (I, 9).

De este tipo es, por ejemplo, la última proposición del Libro II:

> *"Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada"* (II, 14).

y todas las proposiciones del Libro IV, como por ejemplo,

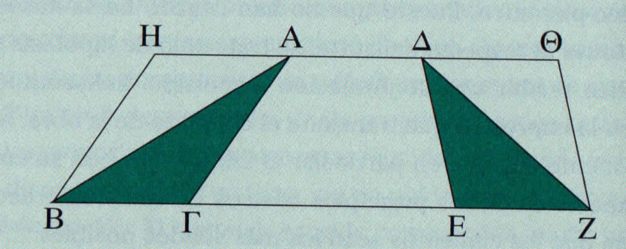
> *"Inscribir un pentágono equilátero y equiángulo en un círculo dado"* (IV, 11).

El resto son aserciones o *teoremas*, es decir, resultados nuevos, algunos enunciados en forma condicional, como por ejemplo:

> *"Si dos rectas se cortan, [entonces] hacen los ángulos del vértice iguales entre sí"* (I, 15).

Una proposición euclidiana

Veamos las partes y la manera de proceder en la demostración geométrica. Se trata de la proposición 38 del Libro I.



Proposición o enunciado (prótasis)

Los triángulos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

Exposición (ékthesis)

Sean ΑΒΓ, ΔΕΖ *los triángulos [que están] sobre las bases iguales* ΒΓ *y* ΕΖ *y entre las mismas paralelas* ΒΖ, ΑΔ.

Determinación (diorismós)

Digo que el triángulo ΑΒΓ *es igual al triángulo* ΔΕΖ.

Construcción (kataskeue)

Prolónguese, pues, ΑΔ *en ambos sentidos hasta* Η, Θ, *y por el [punto]* Β *trácese* ΒΗ *paralela a* ΓΑ [1,31], *y por el [punto]* Ζ *trácese* ΖΘ *paralela a* ΔΕ.

Se ha podido prolongar la recta finita ΑΔ *en virtud del* Postulado 2, *y se pueden trazar las paralelas por la proposición 31: Por un punto dado trazar una línea recta paralela a una recta dada.*

Demostración (apódeixis)

Entonces cada una de las [figuras] ΗΒΓΑ, ΔΕ ΖΘ *es un paralelogramo; y* ΗΒΓΑ *es igual a* ΔΕ ΖΘ: *porque está sobre las bases iguales* ΒΓ, ΕΖ *y entre las mismas paralelas* ΒΖ, ΗΘ *[I, 36];...*

Se ha aplicado la proposición 36, que se refiere a paralelogramos: Los paralelogramos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí.

...y el triángulo ΑΒΓ *es la mitad del paralelogramo* ΗΒΓΑ: *porque la diagonal* ΑΒ *lo divide en dos partes iguales [I, 34];...*

Se ha aplicado ahora la segunda parte de la proposición 34, relativa también a paralelogramos: En las áreas de paralelogramos los lados y los ángulos opuestos son iguales entre sí, y la diagonal las divide en dos partes iguales.

...y el triángulo ΖΕΔ *es la mitad del paralelogramo* ΔΕΖΘ: *porque la diagonal* ΔΖ *lo divide en dos partes iguales [I, 34];*

El mismo razonamiento se ha repetido dos veces de manera análoga:

Por tanto, el triángulo ΑΒΓ *es igual al triángulo* ΔΕΖ.

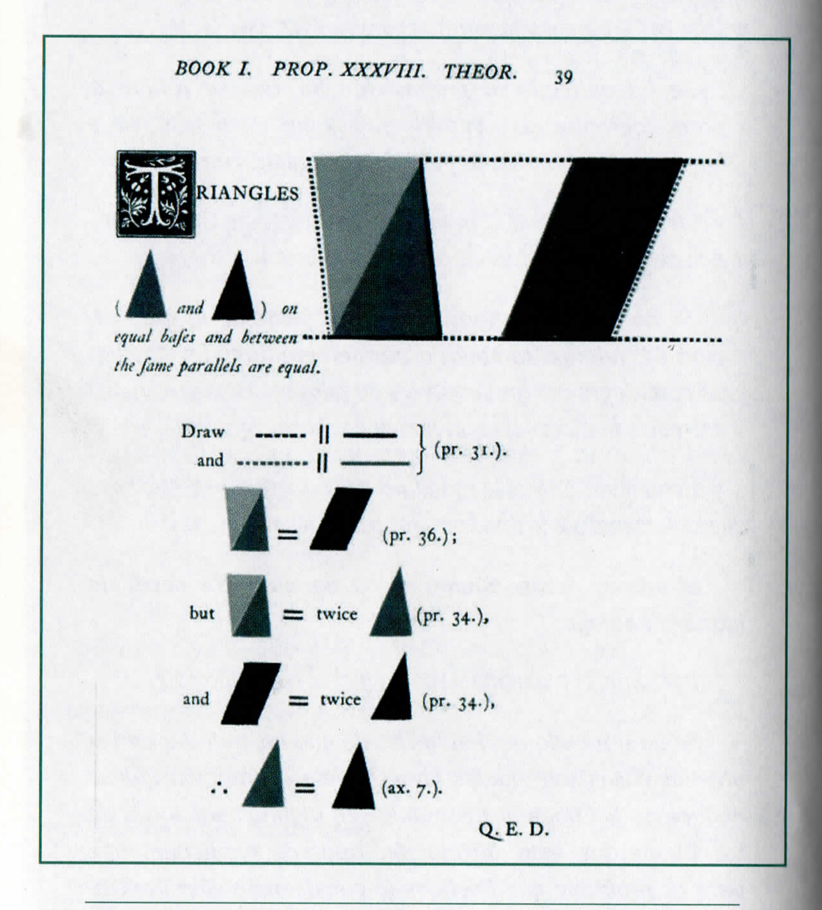
Se ha aplicado aquí el hecho de que las mitades de las mismas cosas son iguales entre sí, una afirmación que se deduce de las nociones comunes: en algunas ediciones de los Elementos *esta afirmación aparece explícitamente, pero es probable que Euclides lo considerase sólo implícitamente para obtener esta afirmación que remata la demostración de la proposición.*

Conclusión (syumpérasma)

Por consiguiente, los triángulos que están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales entre sí. Q. E. D.

y otros que introducen una propiedad (como por ejemplo en el caso de la proposición 38).

La estructura de cada proposición sigue un esquema fijo, que se encuentra, con pequeñas variaciones, en todas las obras grie-



En 1847 fue publicada en Inglaterra por Oliver Byrne una inusualmente atractiva edición de los seis primeros libros de los *Elementos*. Lo que diferencia a esta edición de las demás es el uso del color y el que realiza las demostraciones de Euclides mediante imágenes, utilizando el menor texto posible.

En la imagen, la página del libro de Byrne en que se demuestra la proposición 38 del Libro I (no se recogen los colores del original).

gas de matemáticas. Después del enunciado o *proposición* (en griego *prótasis*; hoy en día la palabra *proposición* se refiere al conjunto del enunciado y la demostración), sigue la demostración, dividida a su vez en varias partes. En primer lugar figura la *exposición*, una frase que expone o recuerda la situación geométrica en la que se está, en relación con la figura correspondiente a la proposición, a la que se hace referencia usando letras griegas para designar los puntos. Se pasa aquí del enunciado, que es completamente general, a la figura que aparece dibujada en el texto, y que por supuesto es un caso particular que ejemplifica todas las situaciones semejantes.

A continuación aparece la *determinación* o delimitación (en griego *diorismós*): se trata de una frase que, refiriéndose siempre a la figura y usando las letras correspondientes, explica cuál es el objetivo que se debe alcanzar. En los teoremas, esta frase se inicia con las palabras *"Digo que..."*; en los problemas, la frase se inicia con las palabras *"Hay que [trazar, dividir, etc.]..."*. Llegados a este punto, es como si se hubieran ordenado mentalmente las ideas con la ayuda de un lenguaje técnico, específico de las matemáticas, muy elaborado, compuesto por una terminología, un modo preciso de construir las afirmaciones y un criterio para designar los objetos geométricos con la ayuda de las letras.

Acabada esta fase preliminar, empieza la elaboración matemática con una *preparación*, que completa la figura geométrica tal y como aparece en el dibujo, introduciendo por ejemplo puntos o segmentos auxiliares. Sigue a continuación el razonamiento deductivo que permite demostrar el teorema o realizar la construcción solicitada en el problema aplicando resultados ya conocidos, es decir, la *demostración* (*apódeixis*) propiamente dicha. La validez general del resultado es debida a que cada uno de los pasos deductivos tiene carácter general, es decir, no depende de características particulares de la figura dibujada, como por ejemplo sus medidas precisas. La proposición concluye con la *conclusión*, que consiste en una frase que repite el enunciado (subra-

yando así el valor general de la demostración) seguida por una expresión siempre igual: en los teoremas Q. E. D. (que es lo que había que demostrar) y en los problemas Q. E. F. (que es lo que había que hacer).

Investigación matemática, escritura, lógica deductiva

El discurrir ordenado de la demostración de una proposición no describe el modo en el que un matemático piensa para convencerse de la validez de un teorema. Menos aún la presentación ordenada de contenidos e instrumentos matemáticos de los *Elementos* corresponde al camino que sigue un matemático o un grupo de matemáticos en su investigación o en la elaboración de una nueva teoría, tanto hoy en día como en el pasado. El camino intelectual seguido por quien se ocupa de matemáticas es difícil de explicar, ya que en la investigación entran en juego los resultados ya demostrados, las definiciones ya conocidas y otras introducidas cuando se considera necesario, pero también la intuición geométrica, criterios internos de las matemáticas como la simetría y la analogía e incluso consideraciones estéticas, un *gusto* matemático que se resiste a cualquier descripción precisa.

Es cierto que cuando las ideas están tomando forma, el matemático prueba inmediatamente a escribir una proposición o teorema, pues la escritura le ayuda a precisar sus ideas y es una aliada imprescindible en su trabajo. También es cierto que los matemáticos *hablan* de matemáticas y son famosos algunos episodios de conversaciones matemáticas terriblemente abstractas o de teoremas elaborados mentalmente durante el sueño. Pero el trabajo del matemático no ha terminado hasta que no ha escrito definitivamente su teorema de manera ordenada, siguiendo un patrón que no se aleja mucho del que hemos visto en Euclides: la formulación de un enunciado preciso de tipo general, la introducción de un lenguaje simbólico que expresa concretamente el resultado buscado y fija las

ideas, seguido de una demostración deductiva en la que especifica los resultados ya demostrados que ha utilizado. El teorema escrito será leído y juzgado rigurosamente por sus colegas: la comunicación y discusión de resultados es parte integrante de la actividad matemática.

De esta manera, el matemático actual reconoce un aire de familia en el texto de Euclides y las demostraciones conservan la capacidad de convencer, ratificada por las palabras finales de la conclusión, que siguen hoy siendo utilizadas, "que es lo que había que demostrar" (en latín "quod erat demostrandum"), expresión que se suele abreviar en Q. E. D. Sin embargo, es indudable que siente también muchas diferencias. Podríamos decir que la retórica de la demostración es más ágil y evita lo que parece inútil repetición (por ejemplo en la conclusión), quizá porque en el curso de su historia las matemáticas han perfeccionado su estructura deductiva y resuelto el problema del razonamiento general que los griegos desarrollaban en relación con una figura. Para superar este obstáculo, las matemáticas modernas han arrinconado cada vez más la intuición espacial (hasta reducirla a una mera componente de la psicología del matemático) y con ella la relación de las matemáticas con la realidad. A este proceso creciente de abstracción ha correspondido una manera diferente de concebir las definiciones y un nuevo papel asignado a las premisas de la teoría, los postulados o -como se dice hoy- axiomas.

Perfeccionar el rigor lógico del edificio de las matemáticas ha sido un objetivo constante de los estudiosos de esta disciplina. Entre finales del siglo XIX y principios del siglo XX pareció por un momento que, gracias en parte a los estudios de lógica, este objetivo estaba al alcance de la mano. Fue una gran sorpresa descubrir que existen limitaciones ineludibles en la fundamentación lógica axiomática de las matemáticas: volveremos a este tema en el último capítulo del libro. Baste añadir que, a la luz de estas limitaciones, aún maravilla más la coherencia lógica del edificio eucli-

diano. En realidad, desde este punto de visto, ni aun el Libro I, el más perfecto, se ha visto a salvo de críticas, pues se ha descubierto que Euclides usa implícitamente otros postulados, además de los que enuncia al principio de la obra. De los demás libros, ofrece una gran solidez también el Libro V, mientras que otros, como el Libro X, que reflejan un campo de investigación menos trillado, tienen menor unidad y trabazón lógica. Así, en los *Elementos* es bien visible un aspecto característico del pensamiento matemático como es que la aspiración a una formulación de los resultados según la férrea lógica deductiva no impide que los razonamientos informales ocupen un lugar muy importante en su avance.

La geometría plana: construcciones con regla y compás

Los cuatro primeros libros de los *Elementos* pretenden exponer sistemáticamente un cuerpo de conocimientos, la geometría plana, cuyo objeto es el estudio de los objetos geométricos. Los primeros tres postulados afirman que es posible realizar ciertas operaciones geométricas. Estas operaciones son descritas en términos abstractos, pero las construcciones geométricas que se basan en ellas corresponden a las figuras que podemos dibujar con el auxilio de una regla y de un compás. Las construcciones geométricas que aparecen en los *Elementos* son todas realizables con estos dos instrumentos. Hemos recordado ya los temas principales estudiados en el Libro I, cuyas últimas proposiciones anticipan el tema del siguiente libro. Por ejemplo, en la proposición 45 del Libro I se demuestra que es siempre posible construir un paralelogramo igual a cualquier figura rectilínea dada (*igual* significa que ambas figuras tienen la misma área). El Libro II, el más breve, desarrolla el estudio de problemas de equivalencia de figuras como el de esta proposición, concentrándose sobre todo en el rectángulo. Su última proposición resuelve el problema:

"Construir un cuadrado igual a una figura rectilínea dada" (II, 14).

Resulta natural preguntarse si es posible encontrar también un cuadrado igual a un círculo dado, el famoso problema conocido como la *cuadratura del círculo*. Esta construcción es imposible usando sólo regla y compás, al igual que son imposibles otras construcciones como la duplicación del cubo (encontrar un cubo que sea dos veces un cubo dado) o la trisección del ángulo. Las tres construcciones interesaron mucho a los matemáticos griegos, como demuestran las colecciones de soluciones posibles recopiladas por autores del final de la Edad Antigua.

Los libros III y IV se ocupan del círculo y la circunferencia. El Libro III reúne un grupo de 37 proposiciones básicas de la geometría del círculo: empieza por resolver el problema de *"hallar el centro de un círculo"* y prosigue acumulando nuevas propiedades de cuerdas, arcos y ángulos en el círculo, así como sobre rectas tangentes a la circunferencia.

El Libro IV es breve y compacto y resuelve (usando proposiciones demostradas en los tres libros precedentes) 16 problemas que son siempre del mismo tipo: construir una figura rectilínea inscrita en un círculo dado o bien circunscrita en torno a un círculo dado; o, al revés, construir un círculo inscrito en una figura rectilínea dada o bien circunscrito a una figura rectilínea dada. Primero se examinan detalladamente los casos en los que la figura rectilínea es uno de los siguientes polígonos regulares: un triángulo, un cuadrado o un pentágono regular. Las dos últimas proposiciones se refieren al hexágono regular y al pentadecágono o polígono regular de 15 lados; pero se resuelve sólo el primer tipo de problema, la inscripción en un círculo dado, que en cada caso requiere un procedimiento de demostración diferente, y se añade la indicación de que *"por procedimientos semejantes a los expuestos en el caso del pentágono"* se pueden realizar las otras tres construcciones. Es

La cuadratura del círculo

El área del círculo es proporcional al cuadrado de su radio. La constante de proporcionalidad es un número que llamamos hoy π. Si consideramos un círculo de radio $r = 1$, su área es precisamente π. El problema de cuadrar el círculo con regla y compás está relacionado con la naturaleza de este número. No se trata de obtener gráficamente una buena construcción aproximada usando una regla y un compás, sino de obtener una construcción geométrica exacta.

Sólo en el siglo XIX, gracias al punto de vista del álgebra, se consiguió entender en profundidad el problema relativo a los tipos de números que subyace en muchos antiguos problemas geométricos griegos. La proposición 46 del Libro I explica como construir con regla y compás el cuadrado cuyo lado sea un segmento de longitud un número dado. Pero ¿cuáles son los números (longitudes de segmentos) que se pueden construir? Son los números algebraicos, *que cumplen la propiedad de que son solución de una ecuación algebraica del tipo*

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ (los coeficientes de la ecuación) son números racionales.

Son números algebraicos, por supuesto, los números enteros, así como los números racionales, como por ejemplo

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \dots$$

Pero son algebraicos también números como la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1, es decir un número que cumple la siguiente ecuación

$$x^2 = 2 \text{ o, escrita de otra manera, } x^2 - 2 = 0$$

y que modernamente se denota $\sqrt{2}$. Efectivamente este segmento (número) se puede construir con regla y compás.

Modernamente $\sqrt{2}$ se denomina número irracional, *porque no existen dos números enteros a, b tales que se pueda escribir*

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

El Libro X de los Elementos *trata precisamente de este tipo de números irracionales que se pueden construir geométricamente. Ahora bien, existen también números irracionales que no son algebraicos, llamados modernamente* trascendentes. *El número π es un número trascendente, que no puede ser construido con regla y compás.*

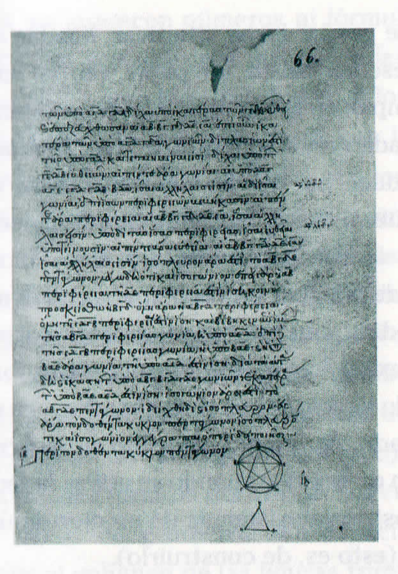
como si estos otros problemas quedaran como ejercicio para el lector (como se escribe a menudo en los libros de matemáticas modernos), simple ejercicio y no verdadero problema, pues no es necesario discurrir para encontrar una nueva demostración sino que basta aplicar por analogía un razonamiento ya expuesto.

De nuevo en este caso cabe preguntarse si es posible inscribir cualquier polígono regular en un círculo dado usando sólo la regla y el compás. La respuesta es de nuevo negativa: por ejemplo, el heptágono (7 lados) y el eneágono (9 lados) inscrito no se pueden construir, mientras que el polígono regular de 17 lados sí (como demostraría siglos más tarde Carl Friedrich Gauss).

Intuición geométrica y abstracción matemática: el espíritu de los *Elementos*

A través de las definiciones, de los postulados y de las nociones comunes, en los *Elementos* se observa un esfuerzo por elucidar cuáles son las ideas básicas que maneja el matemático (el geómetra). Esto nos permite intuir que los matemáticos griegos, además de investigar las propiedades de números y figuras, se interesaron también por cuestiones de tipo filosófico sobre la disciplina que cultivaban. Se trataba, por ejemplo, de asuntos como la relación de las matemáticas con la realidad o la idea de infinito, lo que explica la cuidadosa introducción de las definiciones y las nociones comunes. A su vez, estas cuestiones estaban relacionadas con la manera de razonar y avanzar en el conocimiento del matemático.

En los *Elementos* se describen explícitamente, en los postulados, las bases del trabajo en la geometría plana, limitando los procedimientos aceptados a las construcciones con regla y compás. Consideremos el ejemplo de la construcción del pentágono regular, una figura que recibió una gran atención ya entre los pitagóricos, pues el pentagrama o pentágono estrellado era una figura a la que asociaban un valor espiritual. Además de la construcción con regla y compás expuesta en el Libro IV, se puede construir usando una regla marcada (una regla en la que se ha marcado un segmento de longitud dada con la ayuda de dos puntos, sus extremos), procedimiento que se llamaba *neusis*. O bien se puede aplicar la teoría de la proporción, esto es, razonar sobre la semejanza de figuras. Probablemente estas construcciones fueron utilizadas por los precursores de Euclides. En los *Elementos* las propiedades de semejanza que hacen posible la construcción del pentágono regular son tratadas en el Libro XIII, que en cierto modo *repite* una solución al problema, usando instrumentos diversos (no aparece en la obra, sin embargo, ninguna construcción por medio de *neusis*). Además, el autor no da explicación alguna de sus motivaciones, a diferencia de lo que ocurre en los



Página de los *Elementos* (manuscrito en griego, siglo XI) en la que aparece el pentagrama místico de los pitagóricos (Biblioteca de El Escorial).

manuales modernos de matemáticas, donde a menudo se comentan los diferentes métodos o alternativas disponibles.

Estos aspectos peculiares presentes en las páginas de los *Elementos* han inducido a los historiadores a usarlos como indicio de la evolución histórica de la geometría griega. El Libro IV, por ejemplo, parece la trascripción de un tratado sobre el tema de las figuras inscritas y circunscritas autónomo, ya que sus proposiciones no son usadas en los libros siguientes y las dos primeras definiciones del libro parecen superfluas, pues no son usadas ni en este libro ni más adelante. Usa ampliamente, eso sí, los resultados de los tres libros anteriores, así que quizá Euclides lo retocó, adaptándolo a la colocación que deseaba darle en el interior de su obra e introduciendo una construcción del pentágono diferente, que correspondía a su deseo de introducir en un segundo tiempo la semejanza de figuras, es decir un orden de propiedades menos básico.

La organización de los *Elementos* da fe de precisión conceptual y de refinamiento en la exposición y la demostración. Aún así, existen muchos presupuestos del trabajo geométrico que no son identificados, porque la actividad del geómetra griego estaba

guiada todavía fuertemente por las ideas intuitivas, ligadas a las figuras dibujadas, que desempeñaban un papel central en la demostración. Así, por ejemplo, en las primeras proposiciones del Libro I las figuras se trasladan o se superponen, una operación que actualmente se introduce por medio de axiomas de congruencia. De la misma manera, la existencia de puntos de intersección entre las figuras elementales, la recta y el círculo, se deduce de la observación de la figura que acompaña a la demostración, mientras hoy en día (¡aunque pueda parecer sorprendente!) para garantizar tal existencia se introducen postulados de continuidad. Por último, a lo largo de la obra se abandona en ocasiones el estilo acostumbrado, por ejemplo cuando se recurre al movimiento en la definición de esfera o cuando se utiliza la reducción al absurdo para demostrar la existencia de un cierto número en lugar de encontrarlo (esto es, de construirlo).

La geometría moderna evolucionó hacia un enfoque mucho más abstracto en el que el papel fundamental dejó de ser desempeñado por las figuras que podían ser representadas con un dibujo o los cuerpos sólidos y pasó a ser representado por la idea de *espacio geométrico* (la recta, el plano, el espacio tridimensional). Desde este punto de vista, los postulados pasaron a ser interpretados no ya como herramientas constructivas, sino como definición de las características de este espacio: homogéneo, continuo, uniforme. En un salto ulterior de abstracción, se abandonaron las tres dimensiones del espacio físico para pasar a considerar espacios de dimensión cuatro, de cualquier dimensión e incluso de dimensión infinita.

Las magnitudes geométricas

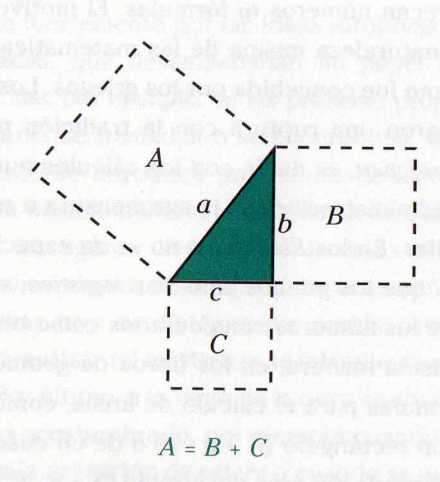
La estructura deductiva del Libro I y de las diferentes partes de los *Elementos* ha constituido durante siglos un modelo de teoría matemática, y como tal sigue siendo reconocido por los matemáticos hoy en día. Sin embargo, basta hojear al azar sus diferentes libros para notar una importante diferencia, evidente para cualquiera, con los libros de matemáticas actuales: en la

obra no aparecen números ni fórmulas. El motivo está relacionado con la naturaleza misma de las matemáticas como disciplina tal y como fue concebida por los griegos. Los matemáticos griegos operaron una ruptura con la tradición precedente de *matemática práctica*, es decir, con los cálculos numéricos necesarios en la administración, en la agrimensura o en las actividades mercantiles. En los *Elementos* no se da espacio a la aritmética práctica, que los griegos llamaban *logística*, sino a una teoría general de los números considerados como objetos abstractos. De la misma manera, en los libros de geometría plana no aparecen fórmulas para el cálculo de áreas, como las fórmulas del área de un rectángulo ($R = u \cdot v$) o de un cuadrado ($C = l^2$) o la famosa fórmula del área del círculo ($S = \pi \cdot r^2$). Tampoco en los libros de geometría del espacio aparecen fórmulas para medir el volumen de las figuras tridimensionales.

Por supuesto, los matemáticos griegos conocían fórmulas o recetas para el cálculo de áreas y volúmenes. Pero no era éste, según ellos, el objeto de la geometría. Actualmente, apenas uno estudia la definición de segmento, de triángulo, cuadrado y rectángulo, aprende a asociar a cada una de estas figuras uno o más números o medidas (la longitud del segmento, el lado del cuadrado, los lados del rectángulo, los lados y la altura del triángulo, el área de triángulo, cuadrado y rectángulo). Así, la propiedad del triángulo rectángulo dada por el teorema de Pitágoras es enunciada en estos términos: el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Cuando hablamos del *cuadrado* de la hipotenusa nos referimos a su longitud *a* multiplicada por sí misma (*elevada al* cuadrado):

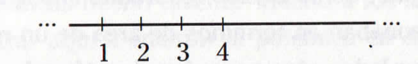
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Este teorema aparece en el Libro I (proposición 47), donde se habla del cuadrado de la hipotenusa entendiendo el cuadrado *construido sobre* la hipotenusa; es decir, se demuestra que:



Se trata de una distinción importante. Significa que, en los *Elementos*, las figuras planas (como las rectas, las figuras sólidas y los ángulos) son vistas no sólo como formas, sino también como magnitudes, esto es, como un tipo especial de cantidad, la magnitud geométrica. Las magnitudes geométricas se pueden comparar entre sí, se pueden sumar, como en el teorema de Pitágoras, pero no se pueden multiplicar, a diferencia de los números. Magnitudes geométricas y números son, por lo tanto, dos tipos de cantidades distintas. De hecho, los números de los que se ocupan los libros de aritmética son los números 2, 3, 4... (que hoy llamamos números naturales o también números enteros positivos), es decir cantidades *discretas*. Los números son cantidades que se pueden comparar, sumar, restar (el menor del mayor) y multiplicar, pero no se pueden dividir: precisamente muchas proposiciones de los libros de aritmética están dedicadas a las propiedades de divisibilidad de los números.

Las magnitudes geométricas permiten representar no sólo cantidades discretas sino cantidades *continuas*. Para hacernos una idea de lo que esto significa, es usual hoy en día representar los números 1, 2, 3, 4 como puntos situados a la misma distancia entre ellos sobre una recta:



Pues bien, entre cada uno de estos números existe una infinidad de otros números, empezando por los números racionales representados por las fracciones 1/2, 1/3, 6/5, 7/2,... y muchos otros más, correspondientes a los infinitos puntos de la recta que hacen que sea un trazo continuo. Este gran conjunto de números es el conjunto de los números reales. Los matemáticos griegos usaban, en lugar de estos números, las magnitudes geométricas. En la historia de las matemáticas la cantidad ha ido siendo representada cada vez menos geométricamente y cada vez más por medio de varios conjuntos de números (números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales), es decir, ha existido un proceso de *aritmetización*. Y sólo bien entrado el siglo XIX se acabaron de entender a fondo las propiedades de todos estos tipos de números y las relaciones entre ellos.

¿Álgebra o geometría?

Al final del Libro I aparece un método de trabajo en geometría que se suele llamar *método de aplicación de áreas*. Por ejemplo, la proposición 44 dice lo siguiente:

> *"Aplicar a una recta dada en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a un triángulo dado".*

Para simplificar las cosas, consideremos el caso particular de un paralelogramo rectángulo (el ángulo rectilíneo dado es un ángulo recto). Así pues lo que la proposición indica en este caso es que hay que *aplicar a una recta dada un rectángulo igual a un triángulo dado*.

Aplicar un rectángulo a una recta (segmento) AB significa construir un rectángulo tal que uno de sus lados sea AB y que sea *igual* (igualdad de área o contenido) a una figura dada, en este

caso un triángulo. Como hemos recordado antes, los matemáticos griegos no razonaban en términos de área de un rectángulo como producto de sus lados, sino que veían al rectángulo como figura geométrica *comprendida entre sus lados* y obtenían los resultados sobre el *tamaño* o *contenido* de las figuras con una serie de razonamientos sobre las figuras que podríamos llamar de *cortar y pegar*.

Ahora bien, esta expresión puramente lingüística (sin el auxilio de símbolos), así como los razonamientos sobre la figura, nos resultan difíciles de seguir hoy en día, mientras que resulta mucho más fácil traducir todo ello al lenguaje del álgebra. Asociamos al triángulo dado su área T y al segmento dado su longitud a, y el área del rectángulo buscado vendrá dada por las longitudes de sus lados, a y x (longitud desconocida o incógnita). Luego simplemente estamos buscando un valor x tal que

$$T = a \cdot x \qquad [1]$$

o, dicho de otro modo, que sea solución de la ecuación de primer grado (lineal) [1].

Otras construcciones o problemas que aparecen en los *Elementos* corresponden, desde el punto de vista algebraico, a la solución de ecuaciones de segundo grado. Puesto que los escribas babilonios sabían resolver este tipo de ecuaciones, algunos historiadores de las matemáticas han considerado que estas proposiciones son una especie de álgebra en forma geométrica, y que estos conocimientos fueron heredados por los griegos de los babilonios. Los matemáticos griegos habrían dado así con una traducción geométrica que les permitía formular los problemas de manera general y no, como en la matemática de Mesopotamia, en casos numéricos concretos relativos a situaciones prácticas como la medida de un terreno; y obtener demostraciones allí donde en Babilonia se disponía sólo de recetas para hallar las soluciones. Al fin y al cabo, los griegos manifestaban de esta forma su preferencia por la geometría entre todas las ramas de las matemáticas.

Este problema ha hecho discutir mucho a los historiadores y no vamos a entrar aquí a analizar la polémica en detalle. En este caso, el lenguaje de los *Elementos*, con su repetición de expresiones lingüísticas normalizadas que enuncian igualdades entre figuras, ofrece ya un aspecto que se aleja del lenguaje común (como hemos visto en el ejemplo de la prop. 38) y, aun sin utilizar el simbolismo algebraico, se aproxima a la comunicación mediante fórmulas.

Vale la pena entonces añadir dos consideraciones. En primer lugar, debemos recordar que el álgebra no existía en la Antigüedad como técnica de formulación de los problemas en forma de ecuaciones y obtención de soluciones generales de dichas ecuaciones. Dicha técnica fue desarrollada por los matemáticos árabes en el Medioevo y perfeccionada por los matemáticos europeos, a partir del Renacimiento, gracias a las técnicas de escritura abreviada de incógnitas, variables y ecuaciones. Es necesario tratar con cuidado el problema de la evolución histórica de las matemáticas, pues existen importantes elementos de continuidad en la misma, pero también importantes rupturas conceptuales, y la introducción del álgebra es una de ellas (más información en *Cardano y Tartaglia. Las matemáticas en el Renacimiento italiano*, de F. Martín, NIVOLA).

En segundo lugar, en la cuestión del álgebra geométrica vemos una manifestación de los contactos entre las diferentes ramas de las matemáticas que son un aspecto muy característico de esta disciplina. En este caso, podríamos decir que la formulación algebraica nos permite escribir un problema matemático *equivalente* más simple de resolver. Estos contactos entre las varias teorías matemáticas, de naturaleza abstracta y general, que existen independientemente de la evolución histórica concreta, atraen mucho a los matemáticos y son a menudo causa de discusión entre quien se ocupa de investigación matemática y quien estudia la historia de la disciplina. En cualquier caso, es indudable que se trata de un aspecto teórico interno de las matemáticas que ha sido y sigue siendo una de las fuentes de inspiración para obtener nuevos resultados.

Las definiciones del Libro V

1. *Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor.*
2. *Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.*
3. *Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.*
4. *Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra.*
5. *Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.*
6. *Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón.*

[...]

Euclides, *Elementos,* Libro V.
Traducción de Mª Luisa Puertas Castaños, Gredos, 1994.

Para entender mejor la definición de proporcionalidad del Libro V podemos usar símbolos (cometiendo un anacronismo, pero con notaciones que respetan las ideas del Libro V). Indicamos las magnitudes con letras a, b, etc. Un múltiplo de una magnitud es el producto de la magnitud por un número (entero natural) n, que indicamos n·a. Para indicar la razón entre a y b escribimos a:b.

Es interesante observar que en los Elementos *no se habla de* igualdad *entre razones para introducir la proporcionalidad, ni en geometría ni en aritmética. Un posible motivo es que las razones fueran consideradas un tipo particular de cantidad relacionada con la teoría musical. La ciencia griega de la música, la armonía, estaba basada en el estudio de las propiedades sonoras de las cuerdas tendidas y en la comparación entre sus longitudes y los tonos musicales. Ahora bien, se puede hablar del* mismo *intervalo musical entre dos notas (guardan la* misma *razón), pero no de intervalos* iguales.

Consideremos dos pares de magnitudes, a, b y c, d (a y b son del mismo tipo, por ejemplo dos longitudes de segmentos, c y d son también del mismo tipo, por ejemplo dos áreas o contenidos *de una figura plana). Escribimos*

$$a : b :: c : d$$

para indicar que a guarda con b la misma razón que c guarda con d (y leemos a es a b como c es a d*). La condición de la definición 5 se puede escribir diciendo que, para cualquier par de números (enteros positivos) n y m, se cumple una de las siguientes posibilidades:*

$$1)\ n \cdot a > m \cdot b \quad y \quad n \cdot c > m \cdot d$$

o bien $$2)\ n \cdot a = m \cdot b \quad y \quad n \cdot c = m \cdot d$$

o bien $$3)\ n \cdot a < m \cdot b \quad y \quad n \cdot c < m \cdot d$$

Se cumple, por ejemplo, que, si inscribimos en una circunferencia un hexágono regular, el diámetro de la circunferencia es proporcional al lado del hexágono; así mismo, la diagonal de un cuadrado es proporcional al lado del cuadrado. Esta propiedad se puede aplicar a otras magnitudes. Por ejemplo, si un móvil se mueve con movimiento rectilíneo uniforme, el espacio recorrido es proporcional al tiempo.

Razones y proporciones

Los libros V y X de los *Elementos* están dedicados a dos teorías matemáticas entonces recientes, elaboradas probablemente en la segunda mitad del siglo IV, poco antes de que Euclides emprendiera la redacción de su gran obra.

El Libro V está dedicado a sentar las bases de la teoría de las proporciones. Como en el Libro I, por lo tanto, su interés principal es establecer los fundamentos de una teoría y se dedica mucha atención al rigor lógico. Se parte de un conjunto de definiciones, de entre las cuales las más importantes son las 3, 4 y 5, que establecen la idea de proporcionalidad, una idea aplicable a los varios tipos de magnitud.

La definición 5 intenta captar lo que significa *ser proporcional* entre cuatro magnitudes, dos a dos del mismo tipo, sin recurrir a una definición en términos numéricos, usando en su lugar las relaciones generales de igualdad, exceso y defecto entre múltiplos de las magnitudes. El Libro V es más abstracto y difícil que el Libro I, pues los razonamientos se desarrollan gracias a la precisión del lenguaje más que a los diagramas (que ejemplifican la situación en el caso de razones entre segmentos). A partir de las definiciones, se obtienen algunos teoremas básicos que se demuestran elaborando la situación matemática de manera que se pueda aplicar la definición de proporcionalidad. Una vez obtenidos estos primeros teoremas, obtiene muchos otros sin necesidad de volver a recurrir a la definición.

Es interesante observar que la idea de proporcionalidad numérica, que nos resulta actualmente más familiar, es introducida separadamente en las definiciones del Libro VII, el primero dedicado a la aritmética. La definición 5 del Libro V permite superar las limitaciones de la aritmética de los *Elementos*, en la que los números considerados son sólo los enteros positivos, pues hace posible manejar relaciones entre magnitudes geométricas.

En el libro siguiente, el Libro VI, los resultados del Libro V se aplican a las figuras planas para obtener una serie de construcciones y de teoremas. Así, por ejemplo, en la proposición 1 del Libro VI se demuestra la siguiente relación de proporcionalidad entre segmentos y figuras rectilíneas (es decir, entre longitudes y áreas):

"Los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases".

Muchos de estos resultados se refieren a las figuras semejantes, definidas al principio del libro:

"Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales".

Así por ejemplo, la proposición 10 del Libro VI resuelve el problema siguiente:

"Dividir una recta dada no dividida de manera semejante a una recta dada ya dividida".

Estos resultados son como una *caja de herramientas* para el geómetra que le permite pasar de las argumentaciones basadas en la figura, del tipo de las utilizadas en los libros I-IV, a razonamientos puramente verbales basados en relaciones de proporcionalidad. Se avanza así un paso hacia una mayor abstracción del discurso geométrico. Con estos nuevos instrumentos, por ejemplo, en el Libro VI se vuelve a demostrar el teorema de Pitágoras en una versión más general. De esta manera, los libros V y VI fueron los más utilizados por los matemáticos griegos posteriores (el siguiente libro más citado es el Libro I).

En el Libro VI figura también la generalización del método de aplicación de áreas. En lugar de *aplicar* a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada (esto es, en términos modernos, construir un paralelogramo, dado un lado, de área

dada), se trata de construir una figura semejante a una figura rectilínea dada e igual a otra dada; o bien de *aplicar por defecto* a una recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada, construyéndolo sobre la recta por defecto (es decir, el lado del

Las definiciones aritméticas

1. *Una* unidad *es aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una.*
2. *Un* número *es una pluralidad compuesta de unidad.*
3. *Un número es* parte *de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor.*
4. *Pero* partes *cuando no lo mide.*
5. *Y el mayor es* múltiplo *del menor cuando es medido por el menor.*
6. *Un número* par *es el que se divide en dos partes iguales.*
7. *Un número* impar *es el que no se divide en dos partes iguales, o difiere de un número par en una unidad.*

[...]

12. *Un número* primo *es el medido por la sola unidad.*
13. *Números* primos entre sí *son los medidos por la sola unidad como medida común.*
14. *Número* compuesto *es el medido por algún número.*
15. *Números* compuestos entre sí *son los medidos por algún número como medida común.*

paralelogramo no completa el segmento dado) o por exceso (el lado del paralelogramo se obtiene prolongando el segmento). Se exponen así construcciones con regla y compás que corresponden a la solución de una ecuación de segundo grado.

La siguiente es la definición de multiplicación como suma abreviada:

16. *Se dice que un número* multiplica *a un número cuando el multiplicado se añade (a sí mismo) tantas veces como unidades hay en el otro y resulta un número.*

Las definiciones siguientes introducen los números figurados, según una tradición que se remonta a los pitagóricos, por ejemplo las dos siguientes:

19. *Un número* cuadrado *es el multiplicado por sí mismo o el comprendido por dos números iguales.*
20. *Y un (número)* cubo *el multiplicado dos veces por sí mismo o el comprendido por tres números iguales.*

Sigue una definición de proporcionalidad para números:

21. *Unos números son* proporcionales *cuando el primero es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto.*

La última definición se refiere a un tipo de números que se examinarán sólo al final de los tres libros aritméticos.

23. *Número* perfecto *es el que es igual a sus propias partes.*

Euclides, *Elementos*, Libro VII.
Traducción de Mª Luisa Puertas Castaños, Gredos, 1994.

Los libros de aritmética

Los tres libros VII, VIII y IX constituyen un tratado de aritmética, basado sobre las definiciones introducidas al principio del Libro VII.

Como hemos recordado, los números manejados son los números enteros positivos a partir de 2. La unidad, que genera los números, no es considerada un número. En las primeras tres proposiciones de este libro se introduce el algoritmo de Euclides que permite decidir si dos números dados son primos entre sí y en caso contrario encontrar la medida común máxima. La palabra *algoritmo* designa en la matemática moderna un procedimiento que en un número finito de pasos nos permite obtener un resultado de modo *automático*, pues basta aplicarse y seguir las instrucciones. Aunque la creación de algoritmos ha cobrado un gran protagonismo con la invención de los ordenadores electrónicos, han representado un aspecto importante de las matemáticas desde sus orígenes: baste pensar en los algoritmos de las operaciones básicas, suma, resta, multiplicación y división.

El algoritmo de Euclides está basado en un método de la matemática griega llamado *anthyphaíresis*, que consiste en una

Anthyphaíresis

En los Elementos *se utiliza un procedimiento geométrico aplicado a los números llamado* anthyphaíresis *o sustracción mutua sucesiva. Podemos verlo por primera vez en la proposición 1 del Libro VII, referido a los números (enteros), para localizar los números primos entre sí:*

A
Θ
Z Γ
H
B Δ

"Dados dos números desiguales y restándose sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí".

Se procede de la siguiente manera. Se consideran dos números diferentes, asociados en el lenguaje geométrico de los Elementos *a los segmentos AB, ΓΔ, con AB > ΓΔ*

" [. . .] y ΓΔ, al medir a BZ, deje ZA menor que él mismo,

(es decir, se sustrae ΓΔ un número entero de veces y queda como resto un número ZA menor que ΓΔ)

y AZ, al medir a ΔH, deje HΓ menor que él mismo,

(se repite este procedimiento cuantas veces sea necesario hasta que, al cabo de un número finito de pasos se llega a la situación siguiente)

y HΓ, al medir a ZΘ, deje una unidad ΘA".

Si aplicando este procedimiento a dos números, en lugar de una unidad se obtiene un número, ese número será su medida común máxima: se trata del algoritmo de Euclides que permite calcular, en un número finito de pasos, lo que hoy llamamos el máximo común divisor.

En el Libro X este procedimiento se extiende a las magnitudes geométricas, es decir, a los números en general, para localizar magnitudes inconmensurables:

"Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables" (X, 2).

En este caso, la anthyphaíresis *permite encontrar en un número finito de pasos la medida común máxima de dos magnitudes conmensurables.*

sustracción recíproca sucesiva (la versión moderna de este algoritmo utiliza, para calcular el máximo común divisor de dos números, la división con resto).

En el Libro VII se desarrolla además la teoría de la proporcionalidad numérica independientemente de la teoría desarrollada en el Libro V, subrayando así la diferencia entre números y magnitudes geométricas. En las proporciones numéricas manejadas por los griegos, por ejemplo, no se puede garantizar que exista, dados tres números, un *cuarto proporcional* que forme una proporción con los otros tres. Por ejemplo, si consideramos los números 3, 4 y 8, el cuarto proporcional es 6 (porque $4 : 3 :: 8 : 6$), pero si consideramos los números 10, 3 y 5, el cuarto proporcional no existe (sería el número racional 3/2, que los matemáticos griegos no manejaban).

En el Libro X, sin embargo, Euclides compara razones entre números con razones entre magnitudes, lo cual indica que considera la proporcionalidad numérica un caso particular de la proporción generalizada del Libro V. Se establece así un contacto entre las dos definiciones pero sin aducir ninguna aclaración. De hecho, el enigma de la construcción de los *Elementos* radica en gran parte en la ausencia de este tipo de reflexiones metodológicas.

En el resto de los libros se presenta una importante colección de conocimientos de aritmética (sobre números primos, números figurados y números pares e impares, entre otros), muchos de ellos de origen pitagórico.

El difícil Libro X

En el Libro X se afronta uno de los grandes enigmas de la matemática griega, la existencia de magnitudes geométricas inconmensurables, es decir *que no se pueden comparar* porque no existe una medida común, no se pueden medir con la misma medida. En la geometría griega, lo hemos visto, desempeñaban un papel importante los razonamientos de proporcionalidad.

Por ejemplo, si inscribimos en una circunferencia un hexágono regular, el diámetro de la circunferencia es proporcional al lado del hexágono. Sin embargo, los matemáticos griegos descubrieron pronto que no siempre estas comparaciones eran posibles. Dos ejemplos importantes de relaciones entre magnitudes (rectas o longitudes) ya preocupaban probablemente a los pitagóricos. En primer lugar estaba el caso del lado del cuadrado y la diagonal. El problema de fondo era que no existen dos números enteros que puedan describir la relación entre ambas magnitudes, esto es, no existen dos números enteros tales que el lado y la diagonal del cuadrado guarden entre sí la misma razón que los dos números. El segundo ejemplo era el lado del pentágono regular y su diagonal.

Las primeras cuatro proposiciones del Libro X presentan precisamente un criterio para saber cuando dos magnitudes geométricas son inconmensurables, y un procedimiento para, cuando dos magnitudes son conmensurables, encontrar su *medida común máxima.* Este procedimiento se puede considerar la *traducción geométrica* del algoritmo de Euclides introducido en el primer libro de aritmética. Gracias a ella, un algoritmo que era válido sólo para los números (enteros) se extiende a todas las magnitudes geométricas.

Existe pues un problema de correspondencia entre las magnitudes geométricas y los números considerados por los griegos. Modernamente, se ha establecido una correspondencia entre las magnitudes geométricas y los números reales, un conjunto de números que contiene a los números enteros pero también a los números racionales (que tienen una expresión decimal finita o periódica) y a los números irracionales (cuya expresión decimal tiene infinitos decimales no periódicos). Por ejemplo, la razón entre la diagonal y el lado del cuadrado viene dada por el número irracional *radical* $\sqrt{2}$ (un número real colocado entre 1 y 1,5 cuya expresión decimal comienza así: 1,4142356237...). La razón entre la diagonal y el lado del pentágono regular es otro número irracional del mismo tipo:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(colocado entre $\sqrt{2}$ y 1,7 y cuya expresión decimal es 1,6180339887...). El Libro X explora estos problemas, que representaron una gran dificultad para las matemáticas griegas, iniciando una clasificación de las magnitudes que llama *"no racionalmente expresables"*, hasta obtener 13 tipos distintos. Estas cantidades geométricas corresponden a algunos de los números que hoy llamamos irracionales radicales, como por ejemplo $1+\sqrt{2}$, $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ o más complicados $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$, y también radicales bicuadrados como $\sqrt[4]{3}$ (un número real colocado entre 1 y $\sqrt{2}$ cuya expresión decimal se inicia con las cifras 1,3160740129...).

Se ha afirmado a menudo que la compleja definición de proporcionalidad introducida en el Libro V fue elaborada precisamente porque no era posible expresar todas las razones entre magnitudes como relaciones numéricas entre números enteros. En cualquier caso, la aspiración a entender en profundidad la idea de proporcionalidad permitió a Eudoxo obtener una teoría de la proporción lo suficientemente amplia como para incluir los casos de inconmensurabilidad. La teoría expuesta en el Libro X fue elaborada probablemente por otro ilustre precursor de Euclides, el matemático, amigo de Platón, Teeteto. Este libro, que cuenta con más de 110 proposiciones y tres grupos de definiciones, además de lemas o resultados intermedios y de otros fragmentos de texto añadidos, es difícil de entender y aparece a los ojos del lector moderno mucho más oscuro y complicado que el resto de los *Elementos*. El lenguaje geométrico preferido por los griegos parece mostrar aquí su primera debilidad, como si se le escaparan aspectos sutiles del estudio de la cantidad en general o, usando el concepto que hemos mencionado más arriba, del problema de la continuidad. Como veremos en el último capítulo, el lenguaje algebraico mostrará

ser mucho más potente para enfrentarse con estas cuestiones matemáticas.

La clasificación del Libro X es aplicada en el último libro de los *Elementos* -el Libro XIII, atribuido también a Teeteto- para estudiar las relaciones matemáticas entre los elementos de los poliedros regulares. Además, la primera proposición del libro desempeña un papel fundamental en el Libro XII, como veremos a continuación.

La geometría sólida

En el Libro XI se introduce la geometría sólida o geometría del espacio a través de una serie de definiciones que describen las relaciones espaciales entre rectas y planos (paralelismo, ortogonalidad o perpendicularidad), los ángulos sólidos y las figuras sólidas principales y las relaciones de semejanza entre ellas.

En las 39 proposiciones del libro se demuestran las propiedades básicas de la geometría del espacio y se examinan los paralelepípedos (figuras comprendidas por seis planos paralelos dos a dos). Falta aquí, sin embargo, una reflexión sobre los postulados o afirmaciones que no es posible demostrar y que es necesario aceptar para construir toda la teoría, análoga a la que aparece en el Libro I. Esta parte de los *Elementos* resulta mucho menos elaborada que la geometría plana desde el punto de vista del rigor lógico.

El Libro XII trata de la medida de áreas y volúmenes de una figura plana, el círculo, y de cuatro tipos de figuras sólidas: pirámide, cilindro, cono y esfera. La medida no es indicada por medio de fórmulas, por supuesto, sino a través del lenguaje de la proporción. Por ejemplo, la proposición 2 afirma:

"Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros".

y la proposición 18, la última:

"Las esferas guardan entre sí una razón triplicada de la de sus respectivos diámetros".

Las definiciones de la geometría del espacio

1. *Un* sólido *es lo que tiene longitud, anchura y profundidad.*
2. *Y el* extremo *de un sólido es una superficie.*
3. *Una recta es* ortogonal *a un plano cuando forma ángulos rectos con todas las rectas que la tocan y que están en el plano.*

[...]

8. *Planos* paralelos *son los no concurrentes.*

[...]

12. *Una* pirámide *es una figura sólida comprendida por planos, construida desde un plano a un punto.*
13. *Un* prisma *es una figura sólida comprendida por planos dos de los cuales, los opuestos, son iguales, semejantes y paralelos, mientras que los demás son paralelogramos.*
14. *Cuando, permaneciendo fijo el diámetro de un semicírculo, se hace girar el semicírculo y se vuelve de nuevo a la misma posición desde donde empezó a moverse, la figura comprendida es una* esfera.

Para obtener los resultados relativos a figuras como el círculo, el cilindro o la esfera se utiliza un método geométrico conocido como método de exhaución (una palabra derivada del verbo latino *exhaurire*, *agotar*). Se trata de un método que aproxima las figuras por medio de otras figuras de área o volumen conocido, de manera que la figura que se está investigando puede ser considerada como *el límite* de esa serie de figuras que lo aproximan.

[...]

18. *Cuando, permaneciendo fijo uno de los lados que comprenden el ángulo recto de un triángulo rectángulo, se hace girar el triángulo y se vuelve de nuevo a la posición desde donde empezó a moverse, la figura comprendida es un* cono. *Y si la recta que permanece fija es igual a la restante del ángulo recto, el cono será* rectángulo, *y si es menor* obtusángulo *y si es mayor* acutángulo.

[...]

25. *Un* cubo *es la figura sólida comprendida por seis cuadrados iguales.*
26. *Un* octaedro *es la figura sólida comprendida por ocho triángulos iguales y equiláteros.*
27. *Un* icosaedro *es la figura sólida comprendida por veinte triángulos iguales y equiláteros.*
28. *Un* dodecaedro *es la figura sólida comprendida por doce pentágonos iguales y equiláteros.*

Euclides, *Elementos,* Libro XI.
Traducción de Mª Luisa Puertas Castaños, Gredos, 1996.

En los *Elementos* no aparecen las ideas típicas del análisis matemático moderno, esto es, los procedimientos infinitesimales asociados a la idea de límite. Se utiliza el lenguaje geométrico para resolver un problema relativo al infinito, en este caso a las cantidades infinitamente pequeñas, razonando por reducción al absurdo. Se parte de la negación del resultado buscado, y se realiza una construcción geométrica (en el caso del círculo, por ejemplo, se inscriben en él una serie de polí-

Eudoxo, Euclides y Arquímedes: el método de exhaución

Arquímedes no nombra a Euclides en ninguna de sus obras, pero sí a Eudoxo, a quien parece ser que consideraba como el matemático más destacado entre sus antecesores. En su obra El método *cita dos resultados matemáticos cuya demostración atribuye a Eudoxo: "que el cono es la tercera parte del cilindro y la pirámide es la tercera parte del prisma, con la misma base e igual altura". Ambos figuran como proposiciones en el Libro XII de los* Elementos *(respectivamente, como proposición 10, demostrada por el método de exhaución, y como consecuencia de la proposición 7). Y efectivamente se cree que el Libro XII está basado, como el Libro V, en los trabajos de Eudoxo.*

Así, el método de exhaución fue introducido por Eudoxo y recogido por Euclides, pero fue Arquímedes el que lo aplicó sistemáticamente en sus notables investigaciones sobre áreas y volúmenes de figuras. La deuda de Arquímedes con Euclides, sin embargo, es una cuestión histórica difícil de resolver.

Estas investigaciones nos acercan al punto de encuentro entre la matemática griega y la matemática moderna, pues el estudio de estos procedimientos fue uno de los aspectos que condujo al desarrollo del cálculo infinitesimal. Sin embargo, se trata también de un punto de desencuentro, *pues se hace aquí palpable la diferencia entre los métodos geométricos griegos y el moderno tratamiento de la continuidad, del infinito y de los números reales. En el Libro XII de los* Elementos *se usa la proposición 1 del Libro X:*

"Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una magnitud (mayor) que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada".

Arquímedes, en sus obras, explicita más claramente la existencia de una condición para poder aplicar el método de exhaución de Eudoxo a la medida de áreas y volúmenes. Así, en Sobre la cuadratura de la parábola *escribe:*

"El exceso de la mayor de dos áreas desiguales sobre la menor (es una magnitud que) puede sobrepasar, si es añadida a sí misma (cuantas veces se requiera) cualquier área finita dada".

Es decir, dados a y b, con $a > b$, para todo z existe n tal que $n(a - b) > z$. Se trata de lo que hoy se llama un axioma de continuidad o axioma arquimediano en honor de Arquímedes.



Arquímedes representado en un grabado antiguo (Biblioteca Nacional de Francia). Más información sobre Arquímedes en el libro *Arquímedes. Alrededor del círculo* de R. Torija Herrera (NIVOLA, 1999) en esta misma colección.

gonos regulares, duplicando en cada paso el número de lados), que lleva a un resultado absurdo.

Finalmente, el Libro XIII ha sido considerado por muchos -empezando por Proclo- la culminación de los *Elementos*, como si todo el contenido de esta obra hubiera sido reunido para llegar al estudio de los cinco poliedros regulares platónicos (tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro y dodecaedro) que allí se presenta y al resultado siguiente, que aparece como consecuencia de la decimoctava y última proposición del libro:

> *"Digo ahora que, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura comprendida por [figuras] equiláteras y equiangulares entre sí".*

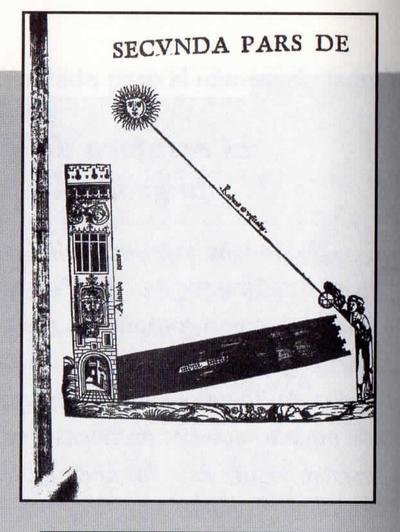
Se trata de un magnífico ejemplo de un teorema de clasificación en matemáticas, que confiere a las figuras implicadas un aura de misterio semejante al que envuelve, desde tiempos remotos, a los números. Y efectivamente, el Libro XIII deja traslucir algunos de los elementos típicos del misticismo aritmético-geométrico de los pitagóricos y de las concepciones cosmológicas asociadas a ciertos números y figuras geométricas. Las primeras doce proposiciones están dedicadas a la división en media y extrema razón definida en el Libro VI y al pentágono regular. En las cinco siguientes, para cada uno de los poliedros platónicos, se demuestra una proposición en la que se construye la figura, se inscribe en una esfera y se compara el diámetro de la esfera con la arista del sólido. En la última se comparan entre sí las aristas de las cinco figuras. Se trata de un libro breve y compacto, cuya elegancia es posible gracias al cuidadoso estudio de la geometría expuesto en los libros precedentes. En él se establece la relación entre las cinco figuras sólidas gracias al lenguaje de la teoría de la proporción que impregna toda la obra euclidiana. Su autor consigue ofrecer un tratamiento homogéneo de todas ellas gracias a los sofisticados instrumentos del Libro X, a los que recurre para examinar las figuras más complejas, el icosaedro y el dodecaedro.

El resumen de la historia de la geometría de Proclo

"No mucho más joven de los precedentes [se refiere a dos discípulos de Platón que ha mencionado] *es Euclides, quien compiló los elementos, poniendo en orden varios teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos resultados de Teeteto y dando así mismo pruebas irrefutables de aquello que sus predecesores sólo habían probado con escaso rigor. Este hombre vivió en la época del primer Tolomeo; puesto que Arquímedes, que vino inmediatamente después del primer Tolomeo, menciona a Euclides; y dicen además que una vez Tolomeo le pregunto si existía en geometría una vía más breve que la de los elementos; y él replicó que no existía un camino de reyes en geometría. Es por lo tanto más joven que los discípulos de Platón, pero mayor que Eratóstenes y Arquímedes. Pues éstos eran coetáneos, como dice en algún lugar Eratóstenes. Su espíritu era el de un platónico, puesto que tenía simpatía con esta filosofía, y de aquí que estableciera como fin de los* Elementos *la construcción de las llamadas figuras platónicas. Existen otras muchas obras de este autor, maravillosas en su exactitud y llenas de investigaciones científicas. Tales son la* Óptica *y la* Catóptrica *y los* Elementos de la música, *y también el libro* Sobre las divisiones. *Merece admiración sobre todo por la redacción de los* Elementos de geometría, *en razón del orden y de la selección tanto de los teoremas como de los problemas realizada en función de los elementos. Pues incluyó no todo aquello que habría podido decir, sino solamente aquellas cosas que podía establecer como elementos. Y usó todas las varias formas de silogismos, y la plausibilidad procedía para algunas de los primeros principios, para otras de las pruebas demostrativas, todas ellas irre-*

>>

futables y exactas y en armonía con la ciencia [...] Más aún debe ser mencionada la continuidad de las pruebas, la disposición y arreglo de las cosas que preceden y de las que siguen, y la potencia con la que trata cada detalle. ¿Te has alejado inadvertidamente de la ciencia, añadiendo o sustrayendo inadvertidamente, cayendo en el error opuesto y en la ignorancia? Puesto que muchas cosas parecen conformes a la verdad y como si se dedujeran de principios científicos, cuando alejan de los principios y llevan al error y engañan al más superficial, él ha introducido también métodos para la comprensión de estas cuestiones, y poseyendo estos métodos podemos entrenar a los principiantes para descubrir los paralogismos y evitar los errores. El libro en el que da estas herramientas lo tituló [libro de] Paralogismos, *enumeró ordenadamente sus varios tipos, ejercitando nuestro intelecto en cada caso con teoremas de todo tipo, estableciendo la verdad hombro a hombro con el falso, y combinando la refutación del error con la ilustración práctica. Este libro es, por lo tanto, purgativo y disciplinario, mientras los* Elementos *contienen una guía incontestable y perfecta de la exposición científica misma en materia de geometría".*



Grabado de la *Sphera Mundi* de Proclo (Edición de Tubinga, 1534).

De la obra *Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides* de Proclo (véase, en las referencias bibliográficas de las fuentes primarias, PROCLO y MATEMÁTICA GRIEGA, vol. I, cap. IV, pp. 144-161).

El discurso de Euclides es puramente matemático, sin referencia alguna al significado cósmico de los poliedros descrito en el *Timeo* de Platón en relación con la doctrina de los cuatro elementos: fuego, aire, tierra y agua. Una vez más, los *Elementos* muestran y esconden, con su lenguaje límpido, exigente, severo. Hemos descrito aquí a grandes líneas su contenido, poco más que una primera aproximación a una obra extraordinaria. Las interpretaciones sobre su arquitectura interna y sobre su significado suscitan una inagotable curiosidad y son, aún hoy, un problema abierto. En el brillante desfile de propiedades de poliedros, triángulos y números, en el detallado análisis del círculo y de la esfera y en muchos otros temas que hacen su aparición en los varios libros, los estudiosos de todos los tiempos identifican sin dificultad el embrión de algunos grandes temas de una disciplina hoy más vital que nunca. Euclides nos ofrece una instantánea, ligeramente borrosa por el inevitable efecto del tiempo, del acto de creación de las matemáticas.

5 Geometría y fenómenos: las otras obras de Euclides

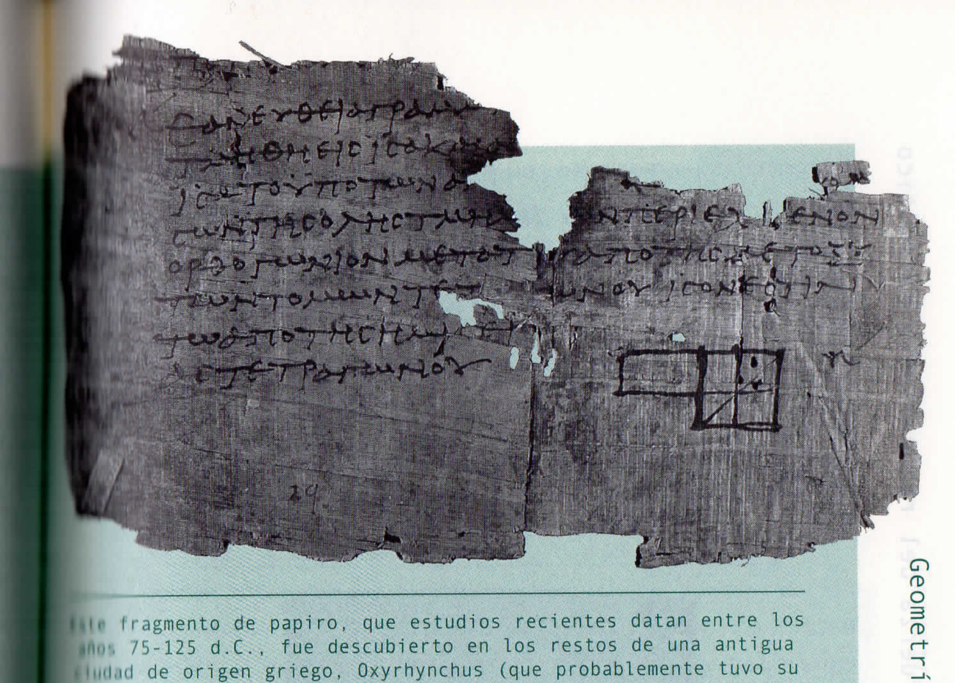
Sólo una parte de los trabajos de Euclides ha llegado hasta nosotros atravesando dos mil trescientos años de historia. En la época de Euclides se escribía sobre papiro, y un tratado científico estaba formado por uno o más rollos de papiro, cada uno de los cuales formaba un capítulo o *libro*, como se suele decir, de la obra. Sólo algunos fragmentos de papiro del texto de los *Elementos* se han conservado hasta la actualidad, mientras que el manuscrito más antiguo conservado de esta obra fue escrito en pergamino en el año 888 d.C. Esto significa que más de mil años de continua labor de copia separan el texto original escrito por Euclides de la primera versión manuscrita que conocemos.

Cada uno de los ejemplares de un tratado debía ser copiado a mano, por lo que hasta la invención de la imprenta el número de copias que podían circular de una misma obra era muy reducido y el riesgo de *corrupción* del texto enorme. Nos referimos al

Los manuscritos de la obra de Euclides: la investigación continúa

Las obras de Euclides fueron copiadas, estudiadas, resumidas, traducidas y comentadas por otros autores durante siglos. Algunos de estos autores eran matemáticos de gran valor; otros, eruditos sin grandes conocimientos de matemáticas; otros, simples copistas. Durante la Edad Media, las matemáticas florecieron en las tierras del islam, donde los autores griegos eran conocidos y estudiados. En los países de Europa cristiana la cultura matemática era muy pobre, pero la obra de Euclides siguió recibiendo atención, pues las matemáticas eran consideradas como parte de la formación básica del hombre culto. Así, en bibliotecas y archivos de todo el mundo se conservan manuscritos en griego, latín, árabe y otras lenguas relativos a obras de Euclides.

Durante el Renacimiento, el deseo de crear una formación humanística crítica y desligada de los dogmas cristianos estimuló el interés por conocer mejor a los clásicos griegos y latinos. Primero los estudiosos italianos, y después otros muchos eruditos europeos, desarrollaron una serie de técnicas para analizar la transmisión de los textos en el pasado e intentar reconstruir versiones de los mismos que se acercaran lo más posible al original (naturalmente, la certeza absoluta es imposible de conseguir). Este es el origen de una verdadera disciplina científica, la filología, que ha seguido desarrollándose hasta hoy. Las obras de Euclides han representado para estos estudiosos un reto importante cuyos hitos fundamentales han sido las ediciones de Campano (siglo XIII; hablaremos de ella en el capítulo 6), Commandino (siglo XVI) y, por fin, la edición de referencia actualmente de las obras completas de Euclides,

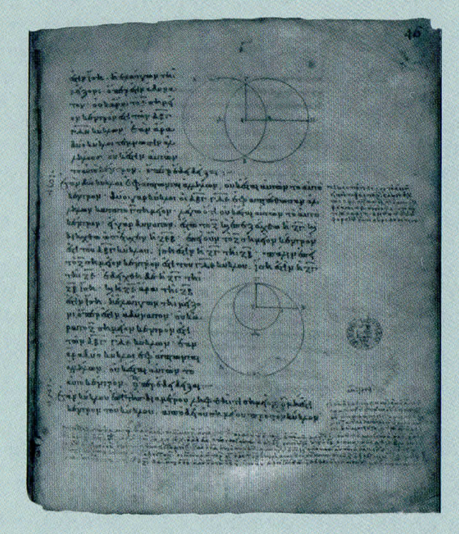


Este fragmento de papiro, que estudios recientes datan entre los años 75-125 d.C., fue descubierto en los restos de una antigua ciudad de origen griego, Oxyrhynchus (que probablemente tuvo su origen en la conquista de Egipto por Alejandro Magno hacia el 330 a.C. y que llegó a ser la tercera ciudad del país), situada unos 160 kilómetros aguas arriba de El Cairo, durante las exploraciones realizadas por un equipo liderado por B. P. Grenfell y A. S. Hunt (de la Universidad de Oxford) en 1896-7. El fragmento está escrito en griego y contiene la proposición 5 del Libro II de los *Elementos* sin la demostración. En términos modernos puede ser interpretado como la formulación geométrica de la identidad algebraica $ab + (a-b)^2/4 = (a+b)^2/4$. Este documento es propiedad de la Universidad de Pennsylvania, que también financió la mencionada expedición.

en ocho volúmenes, preparada por Johan Ludvig Heiberg (1854-1928) con la colaboración de H. Menge. En esta última edición se incluyen las obras consideradas auténticas, las dudosas y las atribuidas falsamente (entre ellas, los libros XIV y XV de los Elementos*); se incluyen además muchos fragmentos, los escolios o notas escritas por otros autores para explicar el texto, así como los comentarios del autor latino Marino a la obra* Datos *y los del autor árabe al-Nayrizi a los* Elementos*. En el siglo XX la investigación histórica y filológica ha permitido mejorar las ediciones de algunos textos y profundizar el conocimiento de la obra de Euclides. Y el trabajo continúa.*

Algunos de los manuscritos más antiguos de los Elementos *escritos en griego*

Sigla	lugar	biblioteca	siglo
B	Oxford (Reino Unido)	Bodleian Library	IX
P	Roma (Italia)	Biblioteca Vaticana	X
F	Florencia (Italia)	Biblioteca Laurenziana	X
b	Bolonia (Italia)	Biblioteca Comunale	XI
V	Viena (Austria)	Nationalbibliothek	XII (?)
p	París	Bibliothèque Nationale	XII



El manuscrito más antiguo de Euclides, conservado en Oxford, en la Biblioteca Bodleian (referencia D'Orville 301), fue encargado en el año 888 por 14 piezas de oro a un experto en caligrafía bizantino llamado Stephanus por el obispo Arethas de Caesarea (actual Turquía). Está escrito en pergamino, pues aunque los libros se comenzaron a escribir y copiar sobre papel a partir del siglo VIII, durante cierto tiempo se siguió prefiriendo el pergamino para preparar copias de lujo. Estos manuscritos eran más valorados por su belleza que por su contenido, y a menudo se copiaban los errores de escritura del manuscrito que servía de modelo, o incluso notas al margen que habían sido añadidas por un lector anterior.

hecho de que al copiar el texto de una obra se podían introducir fácilmente errores involuntariamente. A veces el amanuense copiaba también los comentarios al margen o los escolios (notas de explicación) escritos anteriormente por uno o más lectores del ejemplar del que estaba copiando; otras veces él mismo corregía o añadía algo voluntariamente al texto, con mayor o menor acierto según su preparación.

La tradición atribuye a Euclides muchos otros tratados, dedicados a todas las disciplinas matemáticas: música, astronomía, óptica y mecánica.

Sobre algunas de estas obras disponemos de información porque otros autores antiguos -como Pappus o Teón- las leyeron y escribieron sobre ellas incluyendo a veces citas de partes enteras de la obra de Euclides. Sobre todas las demás la información histórica presenta curiosas contradicciones, creando una situación de confusión que los estudios históricos y filológicos han procurado desentrañar. Algunos tratados que se han conservado y se han atribuido a Euclides en realidad fueron escritos por otros autores: el ejemplo más llamativo son dos libros añadidos a los *Elementos*, el XIV y el XV. De otros, que casi seguramente fueron escritos por Euclides, ha llegado hasta nosotros poco más que el título y algunos fragmentos. Quizá el caso más famoso sea el de un tratado en tres libros titulado *Porismas*, mencionado por Pappus, que suscitó una gran curiosidad entre los geómetras modernos. Final-mente, existen otras obras que han sido consideradas tradicionalmente de Euclides, pero es casi imposible dilucidar si tal atribución es cierta.

Los *Datos*: la caja de herramientas del geómetra

El primer y más numeroso grupo de las otras obras de Euclides es el de los tratados de geometría. En la obra titulada *Datos* se presenta un método de trabajo diferente del usado en los *Elementos* para afrontar problemas de geometría. Los *Elementos* presentan ordena-

Las ediciones de Euclides después de la invención de la imprenta

1482	*Venecia*	*Primera edición de los* Elementos *(se trata de la traducción latina del árabe realizada por Giovanni Campano da Novara en el siglo XIII).*
1505	*Venecia*	*Traducción latina del griego por Bartolomeo Zamberti.*
1509	*Venecia*	*Nueva edición de la traducción de Campano revisada por Luca Pacioli.*
1572	*Pesaro*	*Traducción latina de Federico Commandino.*
1633	*Basilea*	*Primera edición de los* Elementos *en griego (*editio princeps*), realizada por Simon Grynaeus.*
1703	*Oxford*	*Primera edición completa en griego y en latín de las obras de Euclides, preparada por David Gregory.*
1814-18	*París*	*Edición trilingue (griego, latín, francés) de los* Elementos *por François Peyrard.*
1883-1916	*Leipzig*	Euclidis opera omnia *de Johan Ludvig Heiberg.*

damente un conjunto de conocimientos fruto del estudio en profundidad de los problemas geométricos. El estudio ha alcanzado un grado tan avanzado que es posible exponer sus resultados de una manera completamente convincente, pues se ha llegado a identificar las premisas fundamentales y a construir a partir de ellas demostraciones que garantizan la verdad de cada proposición. Se dice que esta fase avanzada es la fase de *síntesis* en la investigación geométrica.

Pero ¿cómo inicia el trabajo un matemático cuando se enfrenta a un problema nuevo? Como sucede en los problemas de la vida real, es necesario primero explorar la situación y examinar los posibles escenarios de desarrollo para entender mejor la naturaleza del problema y cómo resolverlo. En matemáticas, se puede proceder de esta manera: tenemos algunos datos (algunas cosas dadas, ciertas magnitudes, o ciertas relaciones entre ellas, o bien información sobre la posición de ciertos puntos o rectas) y nos preguntamos entonces qué otros datos podemos obtener a partir de ellos que podrían ser útiles para resolver el problema. O también podemos imaginar mentalmente que ya conocemos la solu-



Euclides representado en un óleo del pintor flamenco Joos van Wassenhove, más conocido como Giusto de Gand, realizado en Urbino hacia 1475.

Las obras atribuidas a Euclides

Área	Obra	
	Elementos, Libros I-XIII	
	Elementos, Libro XIV (obra de Hipsicles, siglo II a.C.)	
	Elementos, Libro XV (obra quizá de Isidoro de Mileto, siglo VI d.C.)	
Geometría	*Datos*	
Geometría	*Divisiones de las figuras*	
Geometría	*Cónicas*, Libros I-IV	
Geometría	*Lugares sobre superficies*, Libros I-II	
Geometría	*Porismas*, Libros I-III	
Geometría	*Paralogismos o Pseudaria o Pseudo-graphemata*	
Astronomía	*Fenómenos*	
Música	*Elementos de música* (obra que se suponía compuesta de dos partes)	*Sectio canonis (Sección del canon)*
Música		*Introductio harmonica* (obra de Cleónides)
Óptica	*Óptica*	
Óptica	*Catóptrica* (probablemente obra de Teón de Alejandría)	
Mecánica	Sobre lo ligero y lo pesado (?)	
Mecánica	Sobre la palanca (?)	

ción del problema, y deducir de allí otras informaciones que nos permitan encontrarla efectivamente. En definitiva, la estrategia es preguntarse: ¿dada una cosa, qué otras cosas están dadas?, ¿si conocemos una construcción geométrica, qué otras cosas podemos construir? Este método era llamado por los griegos *análisis*, según nos dice Pappus, que compiló una lista de las obras dedicadas al análisis geométrico como técnica de investigación y la llamó *Tesoro del análisis*.

En los *Datos*, Euclides recopiló una serie de proposiciones, algunas de ellas muy simples, que podían ser de utilidad para proceder en el análisis de un problema. Por ejemplo, en cualquier problema, si en un cierto momento conocemos dos magnitudes, inmediatamente podemos conocer su razón; o bien, conocidas dos rectas, conocemos el rectángulo que forman. A veces esta exploración nos permite identificar bajo qué condiciones es posible resolver un problema que se había planteado (esto se llama en griego *diorismós*). Leyendo los *Datos* podemos entender mejor cómo procedían los geómetras griegos en su trabajo, pero conviene recordar que éste podía considerarse completamente concluido sólo cuando de la fase de análisis se pasaba a la síntesis, esto es, a lograr la exposición de un resultado o de una teoría según el modelo de los *Elementos*.

Las obras perdidas de Euclides y la geometría superior

En el *Tesoro del análisis* Pappus incluyó, además de los *Datos*, otras dos obras de Euclides hoy perdidas. La primera, *Porismas*, era una obra de bastante envergadura (171 teoremas y 38 lemas divididos en tres libros) dedicada a temas de investigación avanzada prosiguiendo en la línea de *Datos*. Se ha dicho a menudo que quizá, si hubiéramos podido leer esta obra, habríamos encontrado una faceta diferente de Euclides como investigador en busca de nuevas ideas más que como recopilador de una tradición. En

Análisis y síntesis en geometría

En 1591 el matemático francés François Viète (1540-1603) publicó un libro dedicado al álgebra al que dio el título de In artem analyticem isagoge *(*Introducción al arte analítico*). En él se exponía el uso de las técnicas algebraicas, que parten de la identificación de aquello que se busca, la incógnita, y su designación con una letra y, una vez escrita la ecuación que verifica, permiten obtener la solución gracias a una serie de transformaciones y manipulaciones de la ecuación. Según Viète, el álgebra era esencialmente la base del análisis (y, efectivamente, hasta bien entrado el siglo XIX la palabra* análisis *será utilizada en matemáticas como sinónimo de la palabra de origen árabe* álgebra*). Su deseo era afirmar que el álgebra tenía la misma dignidad e importancia que la geometría entendida según el modelo de los* Elementos.

Comenzaba entonces la rivalidad entre las técnicas algebraicas o analíticas y las técnicas geométricas o sintéticas que llevó a algunos matemáticos a posiciones puristas *o* extremistas*, pues consideraban que aplicar el álgebra en la investigación geométrica era como desvirtuar la disciplina o un modo de evitar sus dificultades usando un* atajo *inaceptable. La batalla, al final, fue ganada por el álgebra, pues en el siglo XX las técnicas puramente geométricas dejaron de ser utilizadas por los matemáticos. Las matemáticas han sido desde su origen una* hermandad *de disciplinas, de teorías y de métodos, y los contagios internos y la transferencia de ideas y técnicas han mostrado ser siempre mucho más fecundos que los esfuerzos por establecer en su interior compartimentos estancos. Estas interacciones explican por qué, a pesar de las mil ramificaciones actuales de esta ciencia, sus cultivadores siguen afirmando la existencia de una unidad interna en la disciplina.*

la segunda, *Lugares de superficie*, se trataban superficies de figuras sólidas como conos, cilindros y esferas.

Otra obra perdida de Euclides, que probablemente ni el mismo Pappus tuvo ya la fortuna de poder leer, estaba dedicada a las secciones cónicas, es decir, a las tres líneas curvas que se obtienen como intersección de planos con el cono: parábola, hipérbola y elipse (además de la circunferencia, obtenida como la sección de un cono recto cortado por un plano paralelo a su base). Estos tres nombres son de origen griego, pero fueron introducidos después de Euclides, y son utilizados en la obra principal sobre este tema, escrita por Apolonio de Perga en el III siglo a.C. La obra de Euclides estaba dividida en cuatro libros

y ocupa un lugar intermedio en un tema que es uno de los más característicos de la matemática griega. El interés de los griegos por estas curvas estaba relacionado principalmente con el hecho de que servían como instrumento en problemas geométricos imposibles de resolver con regla y compás, como el problema de la duplicación del cubo. Se trata de problemas relacionados con la teoría de las proporciones para cuya solución es útil aplicar algunas propiedades de las cónicas (propiedades que hoy, gracias a la geometría analítica, describimos por medio de fórmulas algebraicas).

Recordábamos en el capítulo 1 que Pappus usa el ejemplo de las cónicas para ilustrar la actitud de Euclides de respeto hacia la

La geometría superior

A partir de los comentarios de Pappus, en su Colección matemática, *y de Proclo, en sus* Comentarios al Libro I de los Elementos, *algunos geómetras del siglo XIX intentaron reconstruir el posible contenido de las obras de geometría perdidas de Euclides.*

En el siglo XIX, después de la larga fase de entusiasmo casi exclusivo por el cálculo infinitesimal y sus aplicaciones a la explicación de los fenómenos físicos, renació entre los matemáticos el interés por la geometría. Se hacía referencia a estos nuevos estudios de geometría con la expresión geometría superior *en oposición a la* geometría elemental. *Uno de los temas principales, inspirado por los estudios de perspectiva modernos, era el de las propiedades proyectivas de las figuras; y una de las propiedades proyectivas más sencillas se refiere a la intersección de las rectas. Desde el punto de vista proyectivo cualquier par de rectas en el plano se cortan, pues las rectas paralelas se cortan en un punto de la recta del infinito, que es añadida al plano ordinario. El enfoque proyectivo permitía estudiar las cónicas desde un punto de vista muy general que abría el camino a la consideración de curvas cada vez más complejas.*

La lectura de los clásicos fue una fuente de inspiración importante. Entre los autores que más se interesaron por los posibles contenidos de geometría superior de las obras perdidas de Euclides figura el matemático francés Michel Chasles (1809-1880), autor de un famoso estudio sobre la historia de la geometría y de una reconstrucción de los Porismas *de Euclides.*

tradición y de deseo de servir de estímulo a las investigaciones de los estudiosos posteriores. Quizá Pappus era demasiado indulgente con él o, siguiendo la tradición, idealizaba su figura, pero si lo que describe es cierto contrasta agudamente con las palabras de Apolonio al principio de su obra *Cónicas*, cuando -a propósito del estudio de las cónicas como lugares geométricos de puntos que cumplen una cierta propiedad (expresada en términos de proporcionalidad) respecto a tres o cuatro rectas- escribe:

"La mayor parte de estos teoremas, y los más elegantes, son nuevos, y fue su descubrimiento lo que me hizo darme cuenta de que Euclides no había resuelto la síntesis de los lugares geométricos respecto a tres o a cuatro líneas, sino sólo una parte de ella, y esa parte no de manera satisfactoria; pues la síntesis no hubiera podido ser completada sin los resultados demostrados por mí".

Como se puede ver, nada de falsa modestia. El orgullo de haber demostrado por primera vez un teorema, la satisfacción de haber encontrado una demostración elegante, la certeza de haber resuelto una cuestión de manera definitiva sin que sea posible objeción alguna, son motivaciones siempre vigentes del trabajo del matemático. Motivaciones, eso sí, que se concilian con la idea de contribuir a una empresa colectiva, que dicta muchos de los aspectos de dicho trabajo.

Por último, Proclo describe una obra algo atípica de Euclides, titulada *Sobre paralogismos* (*Pseudaria* en griego) cuyo objetivo era ilustrar los errores matemáticos o demostraciones engañosas usando simples ejemplos de geometría elemental.

Geometría teórica y geometría práctica

Una obra de geometría de Euclides cuyo original griego no conocemos ha podido ser reconstruida con bastante certeza. Se trata de *Divisiones de figuras*, en la que se estudia como

obtener secciones de las figuras planas siguientes: triángulo, paralelogramo, trapecio, cuadrilátero, círculo y una figura mixtilínea limitada por un arco de circunferencia y dos segmentos. Se indican los procedimientos para dividir una figura dada en dos o más partes iguales o en dos o más partes cuyas áreas están en una razón dada, distinguiendo varios casos. Los procedimientos para medir y subdividir superficies de terreno existían desde tiempos muy antiguos, se trataba de recetas prácticas aproximadas que eran útiles en las tareas de agrimensura y que pueden ser consideradas como los primeros ejemplos de conocimientos geométricos. El estudio de Euclides, por supuesto, afronta el mismo tema desde un punto de vista muy distinto, el de la geometría teórica tal y como fue concebida por los griegos. A partir de esta época, los enfoques práctico y teórico convivirán: ejemplo del primero son los manuales de agrimensura de época romana y del segundo este libro de Euclides o los trabajos de Herón de Alejandría (un autor del siglo I d.C.) sobre medidas en el plano y en el espacio.

Durante el Medioevo, cuando el estudio de la geometría teórica languidecía, los problemas de geometría práctica y el uso de los instrumentos de medida siguieron recibiendo atención y se publicaron muchos manuales sobre este tema. Eran tratados híbridos, pues la mayor parte estaban escritos en latín, lo que demuestra que no estaban dirigidos directamente a los topógrafos o agrimensores (los cuales, probablemente, seguían usando las viejas recetas transmitidas oralmente de maestro a aprendiz). No ofrecían resultados nuevos sino que hacían hincapié en los aspectos operativos, no especulativos de la geometría, inspirándose a la vez en la antigua tradición práctica y en el enfoque teórico euclidiano. En una de estas obras, la *Practica geometriae* escrita por Leonardo de Pisa (más conocido como *Fibonacci*) en 1220, aparece un capítulo basado precisamente en *Divisiones de las figuras* que ha permitido a los historiadores reconstruir el contenido de esta

obra con la ayuda además de una traducción árabe incompleta que apareció en un manuscrito descubierto en el siglo XIX. Quizá Fibonacci usó un manuscrito griego de la obra original de Euclides del que hemos perdido las huellas, o quizá usó -sabemos que circulaba- una versión árabe. Este autor, que era hijo de un comerciante italiano cuyos negocios lo llevaron a residir mucho tiempo en un importante puerto comercial del norte de África, Bugia (actual Béjaia en Argelia), entró en contacto con la matemática árabe antes que cualquier otro europeo. Es más, gracias a él el sistema de numeración, las técnicas de cálculo y el álgebra desarrollados en tierras del islam comenzaron a difundirse en Italia y luego en el resto de la Europa latina.

Los *Fenómenos* y la ciencia de la esfera

Además de la geometría plana y de la geometría sólida, los griegos desarrollaron estudios específicos de esférica, esto es, el estudio de las relaciones geométricas entre arcos de circunferencia y ángulos sobre la superficie de la esfera. La obra de Euclides dedicada a este tema se titula *Fenómenos.* La palabra *fenómeno*, derivada de un verbo griego que significa *mostrarse* o *aparecer*, hace referencia a las apariciones de los astros en el firmamento: el Sol (cuya presencia marca la duración de la luz diurna), la Luna, los planetas y las estrellas visibles entonces sin la ayuda de instrumentos científicos, salvo la dioptra, un instrumento para medir distancias. La geometría de la esfera -que presenta aspectos muy diferentes de los que se encuentran en la geometría plana tal y como se estudia en los *Elementos* de Euclides- fue desarrollada por los griegos principalmente como armazón teórica de la explicación y previsión de los fenómenos celestes, así como empleada en el estudio de la geografía y la geodesia, esto es, en el estudio de la forma, las distancias y la representación de la Tierra.

Desde épocas muy antiguas se tiene constancia de una labor asidua y metódica de recopilación de informaciones sobre la posición de los astros en el cielo: los momentos en que salen (ortos) y se ponen (ocasos), los periodos de visibilidad e invisibilidad en diferentes épocas del año y desde lugares de observación diferentes y las peculiaridades de las trayectorias que se observan desde la Tierra, incluyendo las retrogradaciones (cuando parecen moverse hacia atrás) y las estaciones (cuando parecen detenerse). Los escribas caldeos, en la segunda mitad del primer milenio a.C., desarrollaron unos instrumentos aritméticos muy sofisticados para analizar estas observaciones y para realizar previsiones. Para este fin utilizaban un sistema de notación numérica sexagesimal que es uno de los primeros ejemplos de numeración posicional. Todavía hoy en día usamos un sistema sexagesimal en la medida del tiempo y de los ángulos, magnitudes básicas en la observación astronómica. Los griegos conocieron esta antigua tradición erudita y se interesaron también por la observación astronómica, así como sobre las medidas sobre la superficie de la Tierra.

El uso de los números en la astronomía antigua es sin duda, junto con los estudios de música, una de las bases más sólidas de la convicción según la cual los números esconden el secreto del Universo. En el mundo griego sostuvieron con fuerza esta idea los pitagóricos; y de aquí parte la visión platónica de las matemáticas como clave de acceso al conocimiento del Universo, que tuvo un papel importante en el nacimiento de la ciencia moderna y que todavía hoy actúa en la filosofía científica. Sin embargo, el lugar preeminente ocupado por la aritmética, los números y las relaciones aritméticas fue sustituido en el mundo griego por la geometría, las figuras y las relaciones de proporcionalidad entre magnitudes geométricas.

Entre los griegos se desarrolló una cosmología de tipo geométrico basada en la figura más perfecta, el círculo. Tal descripción del cosmos considera dos esferas concéntricas. Sobre la esfera exterior se encuentran los astros celestes mientras que la esfera interior corresponde a la Tierra, y es tan pequeña en comparación con la exterior que puede ser considerada como un punto. La esfera exterior se mueve, rota cada día de este a oeste, y con ella se mueven los astros siguiendo trayectorias circulares. Esta concepción, ya manejada por Eudoxo, es el punto de partida de la obra de Euclides, que presenta la teoría correspondiente según el modelo deductivo de una disciplina matemática seguido en los *Elementos*. La obra se inicia con un prólogo en el que se afirma la forma esférica del mundo (*cosmos* en griego) y se describen las observaciones que sirven de base a la teoría expuesta en el texto. Se discute si esta introducción pudo ser añadida posteriormente por otro autor. A continuación, se presentan los 18 teoremas astronómicos que componen el tratado con su correspondiente demostración, aunque algunas de estas no son verdaderas proposiciones matemáticas rigurosas como las de los *Elementos*. Se trata de una obra mucho menos elaborada y de naturaleza híbrida, en la que el lenguaje geométrico se mezcla con consideraciones basadas en la observación, y por ello ha recibido muchas críticas a lo largo de la historia.

La visión geométrica de la realidad

Los *Fenómenos* de Euclides nos acercan al frente más avanzado de la investigación matemática en el mundo griego. La obra es una exposición rigurosa escrita para los entendidos en el tema, pues presupone el conocimiento de difíciles teoremas geométricos relativos a las diversas configuraciones de círculos sobre la esfera. Sobre este asunto se trabajaba al menos desde mediados del siglo IV a.C. y existía por tanto un conjunto de resultados ya bien conocidos y una terminología técnica. Otras obras en la misma línea son, antes de Euclides, *Sobre la esfera en movimiento* y *Sobre los ortos y los ocasos* de Autólico, y después de él, la *Esférica* de Teodosio de Bitinia, un autor del II siglo a.C.

Estas investigaciones, motivadas por los problemas de astronomía, estaban íntimamente ligadas a los estudios teóricos de geometría; Teodosio, por ejemplo, aplica algunos resultados de los *Elementos* de Euclides. Así, el desarrollo entre los griegos de una concepción abstracta y general de la geometría -que se alejaba de los orígenes empíricos de los conocimientos geométricos, ligados a la idea de medición- llevó aparejada la constitución de *una visión geométrica de la realidad.* Según este enfoque, la investigación del mundo real debía procurar una descripción en términos geométricos del fenómeno considerado (fenómenos celestes, de la visión, del sonido, del equilibrio y del movimiento). Cada una de las disciplinas correspondientes a un cierto campo de investigación debía seguir los criterios de sistematización, por medio de definiciones, postulados y proposiciones demostradas según el método deductivo, de la geometría pura. Las obras de Euclides dan fe del desarrollo de estas ciencias geométricas como la astronomía -que poseía ya una tradición de uso de técnicas matemáticas- y otras nuevas como la óptica, la música o la mecánica.

Por supuesto que éste no fue el único enfoque puesto a prueba por los griegos en sus estudios sobre los fenómenos naturales. Sin embargo, la enorme influencia de la geometría como modelo de disciplina, plasmado en los *Elementos* de Euclides, se refleja en otros autores clásicos. Es el caso de Galeno, que llegó a expresar el deseo de estructurar la medicina como ciencia deductiva, y del mismo Proclo, que consideraba oportuno realizar una operación análoga en la teología.

La *Óptica*: la geometría de los rayos visivos

Entre los griegos el fenómeno de la visión despertó un gran interés y su estudio fue realizado siguiendo varios puntos de vista. Se trataba, en primer lugar, de un problema filosófico, cuando se examinaba el problema de la percepción y del conocimiento. En segundo lugar, era un problema médico cuando se

analizaba la anatomía y la fisiología del ojo. El tercer filón de investigación, de tipo matemático, era el estudio geométrico de los rayos visuales y del cono visivo. Su origen podría tener relación con problemas prácticos como la topografía, la perspectiva artística y la escenografía. La *Óptica* de Euclides es el primer estudio sistemático de la visión desde un punto de vista matemático.

La óptica antigua alcanzó su máximo desarrollo con la *Óptica* de Tolomeo (siglo II d.C.), en la que se conjugaba el enfoque geométrico con los conocimientos de tipo físico, médico y psicológico, presentando un estudio sistemático de las tres ramas de la óptica: la óptica propiamente dicha, es decir, el estudio de la visión directa; la catóptrica, esto es, el estudio de los espejos y el fenómeno de la reflexión; y la dióptrica o estudio de la refracción, por ejemplo en fenómenos como el arco iris o en la construcción de espejos ustorios.

La óptica geométrica griega partía de una explicación física de la visión que no consideraba el problema de la luz, sino que describía la relación entre el ojo y el objeto visto suponiendo que el ojo emitía un flujo visivo en forma de rayos (líneas rectas) desde un punto colocado en su interior. El haz de rayos forma un cono cuya base es el campo visivo (el ojo humano ve lo que es tocado por el flujo visivo en el interior de este campo). Algunos autores antiguos describían este flujo como una emisión de fuego, pero en la tradición que parte de la obra de Euclides el acento se pone en el estudio geométrico de la situación que hemos descrito, independientemente de consideraciones físicas. La obra parte de siete definiciones (así llamadas en el texto, pero que en realidad son postulados) y se desarrolla en 58 proposiciones en las que se consideran los problemas de la agudeza visual y de la percepción espacial de los tamaños, de las formas y de las figuras, fijas o en movimiento. Por ejemplo, la proposición 2 afirma lo siguiente:

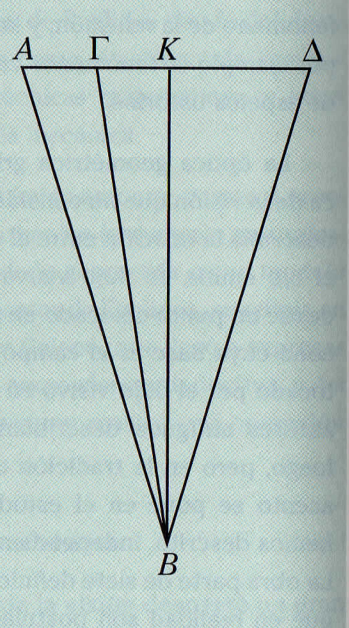
Las bases de un saber matemático: las definiciones de la Óptica

"1. Supóngase que las líneas rectas trazadas a partir del ojo se propagan a lo largo de un espacio de grandes magnitudes.

2. Y que la figura contenida por los rayos visuales es un cono que tiene el vértice en el ojo y la base en los extremos de los objetos vistos.

3. Y que se ven los objetos en los que los rayos visuales inciden y no se ven aquellos objetos en los que los rayos visuales no inciden.

4. Y que los objetos que se ven bajo un ángulo mayor parecen mayores; los que bajo un ángulo menor, menores, y los que se ven bajo ángulos iguales, iguales.



5. Y los que se ven bajo ángulos más elevados parecen más elevados, y los que se ven bajo ángulos más bajos, más bajos.

6. Y, de manera semejante, parecen más a la derecha los que se ven bajo rayos más a la derecha y más a la izquierda los que se ven bajo rayos más a la izquierda.

7. Los objetos que se ven bajo mayor número de ángulos aparecen con más precisión".

Euclides, *Óptica*. Traducción de Paloma Ortíz, Gredos, 2000.

"De los objetos de iguales longitudes que están situados a distancia, se ven con más precisión los que están situados más cerca".

Citemos otros ejemplos, como la proposición 44:

"Hay lugares en los cuales, al cambiar el ojo de posición, las magnitudes iguales y que ocupan ciertos lugares en posición contigua parecen unas veces iguales y otras desiguales".

y la proposición 52:

"Si al trasladarse ciertos objetos aparece algo que no se traslada, lo que no se traslada parecerá trasladarse hacia atrás".

Euclides no analiza el problema central, examinado por Tolomeo, del motivo por el cual los ojos producen una sola imagen en vez de dos. Sólo en algunas proposiciones considera la visión binocular, como por ejemplo en la proposición 27, una de las relativas a la percepción visual de la esfera:

"Si la distancia entre los ojos es menor que el diámetro de la esfera, se verá menos de una semiesfera".

Este hecho es revelador del enfoque de esta obra, marcado por el tratamiento matemático. Su motivación no es la comprensión, desde un punto de vista físico y/o psicológico, de los fenómenos ópticos, sino el procurar una descripción de tipo técnico, ligada a los problemas de dibujo y perspectiva, a los de altimetría o a la observación astronómica (la *Óptica* es citada, efectivamente, en la introducción de *Fenómenos*). Algunas proposiciones están incluso formuladas como tareas, como la proposición 18:

"Conocer de qué tamaño es una altitud dada cuando brilla el sol".

Y la proposición 6 establece una de las bases de la perspectiva, el hecho de que las paralelas parecen coincidir en la distancia:

"Los espacios paralelos vistos de lejos parecen converger".

Existe también una obra atribuida a Euclides, titulada *Catóptrica*, en la que se examinan las propiedades de los espejos planos y curvos en 30 proposiciones, la última de las cuales versa sobre los espejos esféricos cóncavos y su efecto para encender un fuego. Se trata sin embargo de una obra posterior a la época de Euclides. Iniciamos con ella la lista de las obras atribuidas tradicionalmente a Euclides, e incluidas a veces en las ediciones de sus obras, que en realidad no fueron escritas por él, o cuanto menos no se puede afirmar con seguridad que las escribiera.

Matemáticas y conocimiento técnico

Vemos así aflorar en la *Óptica* de Euclides un tercer contexto de los estudios matemáticos. En primer lugar, hemos subrayado que *el estudio liberal de las matemáticas*, el realizado por sí mismo sin ningún objetivo externo a ellas, aparece por primera vez entre los griegos, y contribuye poderosamente al nacimiento de las matemáticas como campo del saber. Los *Elementos* representan idealmente este modelo de conocimiento. En segundo lugar, hemos recordado, a propósito de los *Fenómenos,* que las matemáticas se proponen al mismo tiempo como *instrumento de conocimiento de los fenómenos naturales*. Cabe entonces preguntarse cuál fue la fortuna entre los griegos de la antigua tradición de *uso de los instrumentos matemáticos en las actividades técnicas y prácticas*, pues la actitud del técnico ante el mundo natural es muy diferente de la del filósofo, ya que su objetivo principal no es explicarlo sino dominarlo. Como está escrito en la *Mecánica* atribuida a Aristóteles, usando un verso del poeta Antifonte:

"Mediante la técnica dominamos aquello en lo que somos vencidos por la naturaleza".

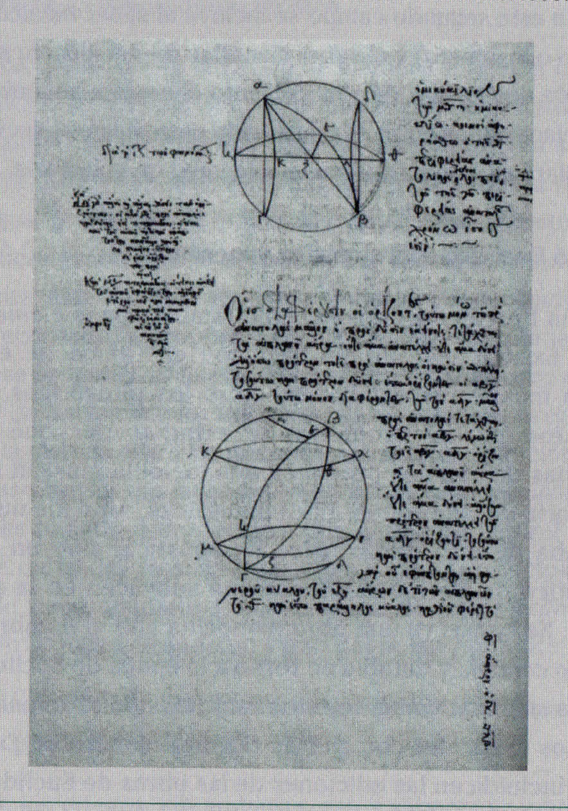
Entre los griegos, sin embargo, estos saberes se empiezan a sistematizar y se consolida su conexión con las matemáticas. Así, por ejemplo, la *Óptica* se ocupa de describir la ilusión visual para poder aprovechar tal recurso en actividades de medida, en la escenografía o en el dibujo. La tradición de estudios de matemática técnica, que hoy podríamos llamar de ingeniería matemática, tiene como representante principal a Arquímedes y, más adelante, a Herón de Alejandría. Este último se refiere explícitamente a la distinción entre, por una parte, la matemática "más honorable y primera", es decir la matemática de los *Elementos* (de los que escribió un comentario) que comprende aritmética y geometría; y, por otra parte, la matemática "que se ocupa de lo sensible", y que comprende logística, geodesia, canónica, óptica, mecánica y astronomía. En este segundo campo se incluye al saber técnico (el del *mecánico* o ingeniero) y el saber científico (el del filósofo natural). Se trata de dos formas de conocimiento diferentes aunque íntimamente relacionadas entre sí. La relación entre ellas evolucionará y se articulará en formas diferentes a lo largo de la historia.

¿Escribió Euclides sobre música y mecánica?

Según Proclo, Euclides escribió también unos *Elementos de música*. Existía una antigua tradición en Grecia de estudios sobre la música, especialmente entre los pitagóricos, que se interesaron por el problema de estudiar por qué ciertas secuencias de sonidos producen una melodía musical aplicando la teoría de las proporciones numéricas. Aquí, de nuevo, no se trataba de un estudio físico de acústica, sino un estudio matemático de las regularidades que subyacen en la armonía musical. Se conserva una obra, conocida con el nombre latino de *Sectio canonis* y datable en torno a la época de Euclides, que presenta sistemáticamente estos estudios que relacionaban los intervalos musicales con ciertas razones numéricas. Esta obra ha sido incluida en las ediciones de las obras de Euclides junto a otra titulada *Introducción a la armonía*. El autor de este último tratado es en realidad Cleónides, un discípulo de Aristoxeno, un importante autor de finales del siglo IV a.C.

Ciencia cuantitativa y ciencia matemática

En los Fenómenos *y en la* Óptica *el lenguaje utilizado es geométrico, el mismo de los* Elementos*: son obras en las que no aparecen números concretos. Por ello surge inmediatamente la pregunta: ¿cómo es posible intentar aplicar las matemáticas al conocimiento del mundo físico o a la actividad técnica sin utilizar valores numéricos?*



Página de los *Tratados de astronomía matemática* de Autólico, un contemporáneo de Euclides que estudió el movimiento de la esfera de las estrellas fijas (manuscrito en griego, 1542).

Para responder a esta pregunta es necesario establecer una distinción entre una disciplina (o un arte) cuantitativo *y una disciplina* matemática*. En el primer caso, los números son sólo un auxilio en el registro y análisis de datos empíricos; en el segundo, las matemáticas son el instrumento que ayuda a describir o explicar en profundidad los fenómenos, sus causas y su dinámica. Los escribas caldeos desarrollaron una astronomía cuantitativa, pues utilizaron los números para la compilación de tablas astronómicas de dos tipos, tablas que recogían datos de observación y tablas elaboradas a partir de cálculos aritméticos útiles en la previsión astronómica. El sistema de numeración posicional sexagesimal que utilizaban se adaptaba muy bien a estos fines, a diferencia del sistema de numeración griego que era incómodo y complicado de manejar.*

Los estudiosos griegos mostraron una marcada predilección por la búsqueda de explicaciones globales del cosmos y se lanzaron a formular arriesgadas hipótesis sobre los componentes, la ordenación y el funcionamiento del mundo. En este contexto intelectual se inscribe la idea de la existencia de un esquema general del Universo y del movimiento de los astros de tipo geométrico, que condujo al desarrollo de la esférica. Las bases de tal hipótesis eran algunos datos de observación bastante poco elaborados, tal y como aparecen en la introducción de los Fenómenos *de Euclides. Más adelante, los griegos asimilaron el sistema de numeración sexagesimal y elaboraron la trigonometría esférica, que les permitió desarrollar la observación sistemática basada en mediciones del movimiento de los astros en términos de tiempos y ángulos. Gracias a estos instrumentos fue posible crear una astronomía matemática capaz de obtener una descripción precisa de los movimientos de los astros. Esta evolución se produjo entre los siglos I y II d.C. con la* Esférica *de Menelao y el* Almagesto *de Tolomeo, la obra máxima de la astronomía griega.*

Existen muchas dudas sobre si la atribución de la obra *Sectio canonis* es correcta. Se trata de un texto ordenado y sistemático, que parte de una introducción dedicada a las bases físicas del sonido y expone y demuestra a continuación 20 proposiciones. Las nueve primeras son resultados sobre proporciones que dependen de teoremas que aparecen en los *Elementos* y el resto están dedicadas a los intervalos musicales. Quizá, como se ha sostenido, pues se han encontrado fallos en la estructura lógica, la obra fue escrita por otro autor basándose en unos *Elementos de música* de Euclides que hoy se han perdido.

El hecho de que Euclides escribiera tratados sobre todos las áreas de investigación matemática invita a pensar que se pudo ocupar también de mecánica. Además, aunque los autores del final de la época antigua no atribuyen a Euclides ninguna obra sobre esta disciplina, algunos autores árabes afirman que escribió un libro titulado *Sobre lo ligero y lo pesado*. El estudio de la matemática antigua en casos como este es una labor apasionante y enigmática, para la que son necesarios conocimientos históricos y lingüísticos sofisticados y la capacidad de moverse entre manuscritos que están depositados en una u otra biblioteca del mundo. Gracias a investigaciones de este tipo fueron encontrados, por ejemplo, en versión árabe, algunos libros perdidos del matemático griego Diofanto.

Se han encontrado algunos manuscritos en los que aparecen varios fragmentos, en latín y en árabe, que podrían corresponder a una única obra de mecánica de Euclides, pero es imposible afirmarlo con seguridad. Uno de ellos es un manuscrito árabe que presenta un breve estudio geométrico de la palanca; podría efectivamente ser una obra de Euclides pues su enfoque no corresponde al de la mecánica aristotélica y su exposición recuerda el estilo característico de Euclides (una definición, dos postulados y cuatro proposiciones), pero sin llegar a ser tan sofisticado como el estudio posterior de Arquímedes.

Los libros XIV y XV de los *Elementos* y la consagración de Euclides como autor clásico

Nuestro sintético recorrido por los *Elementos* y por las obras de Euclides nos ha permitido intuir la riqueza impresionante de las investigaciones matemáticas griegas en los siglos V, IV y III a.C. De todo este gigantesco caudal intelectual apenas nos quedan algunos nombres de matemáticos, de cuya biografía sabemos poco o nada, y un reducido número de tratados de matemáticas, de los que sabemos que constituyen apenas una muestra de la producción escrita de aquellos siglos. Aunque en muchas ocasiones el azar ha determinado cuáles de estas obras se han conservado, muchas de ellas han llegado hasta nosotros porque adquirieron ya entre los griegos la consideración de textos clásicos, y por este motivo fueron estudiadas con gran asiduidad, comentadas y completadas. En los siglos siguientes vivieron importantes matemáticos como Hiparco (en el siglo II a.C.), Herón (en el siglo I d.C.), Tolomeo (en el siglo II) y Diofanto (en el siglo III). Sin embargo, el interés por la investigación original, que llevaba a *marcar las distancias* con los predecesores -como hemos visto en el comentario de Apolonio a propósito de las investigaciones sobre las cónicas de Euclides-, disminuyó en la medida en la que crecían la atención y el respeto hacia los clásicos.

Un ejemplo de este cambio del clima cultural es un tratado de Hipsicles, un autor del siglo II a.C., dedicado a algunos problemas de geometría sólida, y específicamente a proseguir el estudio de las relaciones de proporcionalidad entre los sólidos regulares inscritos en la esfera tal y como aparecía en el Libro XIII de los *Elementos*. Hipsicles investiga las relaciones entre icosaedro y dodecaedro, citando resultados precedentes de Aristeo (un matemático que vivió probablemente en la época de Euclides) y Apolonio, y demostrando la proposición siguiente:

"el lado del cubo es al lado del dodecaedro como el dodecaedro es al icosaedro".

Pues bien, este tratado fue incorporado a los *Elementos* como un libro más, el Libro XIV, como si fuera menos importante el nombre de su verdadero autor que su relación con la principal obra de la matemática griega. Probablemente gracias a ello se ha conservado hasta hoy y los estudios filológicos modernos han permitido descubrir quién fue su verdadero artífice.

En algunas versiones de los *Elementos* figuraba todavía otro libro dedicado a los sólidos regulares, el Libro XV, de mucho menor interés y escrito mucho más tarde por un estudioso de lengua griega del final de la edad antigua. Su autor podría ser Isidoro de Mileto, uno de los dos arquitectos-matemáticos que construyeron la catedral de Santa Sofía en Constantinopla, la capital del Imperio Bizantino, en la época del emperador Justiniano (la catedral, cuya construcción fue concluida en el año 537, es obra de Isidoro de Mileto y de Antemio de Tralles).

Los comentadores griegos de Euclides de mayor valor son tres autores activos en torno a la época final del Imperio Romano: Teón y Pappus, en la Alejandría del siglo IV, y Proclo en la Atenas del siglo V. El comentario de Proclo al Libro I de los *Elementos* examina la obra desde un punto de vista filosófico amplio y es una de las pocas fuentes conservadas sobre la historia de la geometría griega. El objetivo de Teón y Pappus, conscientes de vivir en la época de decadencia del mundo clásico, era facilitar la lectura de las obras de Euclides, Tolomeo y otros clásicos y preservar así su memoria. Su actividad matemática -aunque incluye resultados originales- giraba esencialmente en torno a los textos del pasado. Teón es el autor de la edición de los *Elementos* de la que derivan casi todos los manuscritos y ediciones impresas, tanto en griego como traducidas. Hoy sabemos que introdujo algunos cambios y correcciones, pero su contribución al desarrollo de las matemáticas en los siglos siguientes es inestimable, pues éste tuvo en el estudio de los *Elementos* uno de sus principales motores.

El manuscrito P

Cuando Napoleón invadió Italia, en el botín de guerra que se llevó a París figuraba un manuscrito de los Elementos *de Euclides conservado en Roma, la capital del estado vaticano. Un estudioso francés, François Peyrard se dio cuenta de que este manuscrito era diferente de todos los demás existentes en el mundo. Efectivamente, el manuscrito P, que hoy ha vuelto a la Biblioteca Vaticana, presenta un texto de los* Elementos *que no es el preparado por Teón y que probablemente es más antiguo. Sobre este manuscrito se han basado todos los intentos de llegar a conocer cómo era de verdad el texto original de Euclides.*

6 La influencia de los *Elementos*

Un legado y un proyecto de futuro

Los comentarios sobre la obra de Euclides escritos por autores de los siglos finales de la Edad Antigua rezuman admiración casi reverencial. Aún hoy, la lectura de los *Elementos*, de la *Óptica* o de los *Fenómenos* no puede dejar indiferente. Por una parte, estas obras dan fe de la extraordinaria aventura intelectual de la matemática griega, reflejando una empresa colectiva más que los logros de un único individuo. Por otra, constituyen casi el arquetipo de una exposición rigurosa y sistemática de una rama del saber, el antecedente ideal de la forma de conocimiento que, a partir del siglo XVII, se ha denominado ciencia. La admiración que han suscitado las obras de Euclides y su papel canónico en la transmisión del saber han forjado la imagen de éstas como una recopilación de conocimientos ordenados de manera impecable, y en especial de los *Elementos* como un edificio perfectamente acabado. En las páginas precedentes hemos intentado matizar esta visión: sus escritos son en parte todo lo que acabamos de describir, pero son también obras que miran hacia el futuro.

Los *Elementos*, los *Datos* y la *Óptica* constituían una caja de instrumentos de la investigación matemática y física en curso. Estos instrumentos eran, en primer lugar, *elementos* o conocimientos primordiales ya disponibles, es decir, una serie de conceptos que la labor de los matemáticos había identificado como nucleares y su correspondiente terminología técnica; y un conjunto de teoremas básicos ya demostrados que los matemáticos que escribieron después de Euclides utilizaban efectivamente en sus tratados, a menudo sin advertir siquiera la necesidad de citarlos explícitamente. Eran, también, estrategias de investigación, que el fluir de las proposiciones transmitía de manera natural: cómo trabajar una construcción geométrica en la resolución de problemas; cuándo en una demostración de un teorema conviene proceder por un método directo o por reducción al absurdo; cómo razonar sobre una figura particular dejándose guiar por la intuición geométrica de manera que la conclusión tenga un valor general y sea susceptible de síntesis; la elección de un tipo de figura para la cual se desarrolla un proceso deductivo en todos sus detalles, al que se remite en otros casos esencialmente análogos; la reducción de una situación matemática a otra más simple; el uso en la demostración de técnicas adecuadas a la naturaleza del problema tratado (por ejemplo, limitándose a las construcciones con regla y compás; o utilizando la proporcionalidad sólo si resulta esencial en la demostración); la exploración de las simetrías en geometría; y la explotación de ciertos métodos de demostración. Estos instrumentos eran, por último, la identificación de los problemas dignos de interés o las metas de la investigación, como eran lograr una clasificación completa de ciertos objetos matemáticos, identificar las premisas de una teoría y obtener una formulación deductiva de sus resultados principales, o elaborar un algoritmo que permitiera decidir o encontrar una solución a una cuestión (la técnica algorítmica principal, en los *Elementos*, era la sustracción recíproca sucesiva o *anthyphaíresis*).

En las obras de Euclides, y especialmente en los *Elementos*, conviven además dos *almas* de las matemáticas: por una parte, la preocupación por la estructura lógica de las distintas ramas de la disciplina y de sus diferentes teorías y, por otra, la apertura hacia razonamientos de tipo informal cuando se revelan fecundos, aplazando a un segundo momento la justificación deductiva completa. Esta duplicidad explica que esta obra haya ejercido una doble función: la de modelo *rígidamente* establecido y transmitido de generación en generación y a través de las culturas, como cimiento de la unidad y de la universalidad de las matemáticas; y la de mediador *flexible* capaz de plegarse a nuevas exigencias teóricas en la evolución subsiguiente de las matemáticas, sin que hiciera falta cuestionar los fundamentos de la disciplina.

La transmisión de la tradición euclidiana es un viaje fascinante a través de los siglos y de la geografía del planeta. No hay mejor demostración de la fecundidad de la obra de Euclides que la extraordinaria epopeya de su difusión en la historia y las infinitas discusiones eruditas que ha suscitado hasta los albores del siglo XX. Sólo en esta fase tardía perdió definitivamente su papel central en las matemáticas.

La lectura de los *Elementos* en las tierras del islam

Desde la época de Proclo y de Boecio, en los años dramáticos del hundimiento definitivo del Imperio Romano de Occidente, hasta finales del siglo VIII, la cultura en el área en torno al Mediterráneo vivió un largo paréntesis. Los manuscritos griegos fueron conservados y copiados sobre todo en los monasterios del Imperio Bizantino. En estos siglos iniciales del Medioevo se registró una rica actividad de traducción al siríaco, y es posible que una traducción a esta lengua de los *Elementos* diera a conocer por vez primera esta obra a los estudiosos de lengua árabe, después de que Siria y Persia fueran conquistadas y englobadas en las tierras del islam.

La consolidación religiosa y política del imperio islámico había estado acompañada por el desarrollo de los estudios teo-

lógicos, jurídicos y lingüísticos que abrieron paso al interés por la herencia cultural del mundo griego. La labor de traducción necesaria para asimilarla permitió poner a punto una terminología, en particular en matemáticas, estimulando a la vez una labor de estudio y profundización de las obras clásicas. La obra de Euclides se convirtió en la piedra angular del espectacular desarrollo de la investigación matemática en lengua árabe entre los siglos IX y XII, la época *clásica* de la cultura islámica. Entre finales del siglo VIII y el siglo X fueron realizadas diversas traducciones al árabe de los *Elementos*, en parte bajo el estímulo directo de los gobernantes de Bagdad. Entre ellas destaca la realizada por Ishaq ibn Hunayn -hijo del célebre traductor Hunayn ibn Isaac- revisada por un matemático de valía, Thabit ibn Qurra (826-901). A las traducciones siguieron un gran número de comentarios, ediciones críticas, estudios monográficos de algunas partes (sobre todo de los libros V y X), o incluso de proposiciones específicas, y una serie de trabajos dedicados al quinto postulado. Por ejemplo, la parte dedicada a las matemáticas del *Kitab al-Sifa,* la gran enciclopedia filosófica de Avicena (980-1037), se inicia con un primer libro titulado *Elementos de geometría* basado en la obra de Euclides. Una de las últimas ediciones de los *Elementos*, que gozó de gran difusión, fue la de Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274), que data de 1248.

¿Qué manuscritos griegos manejaron los traductores árabes? El cotejo de las traducciones árabes con los manuscritos griegos disponibles en la actualidad es aún hoy objeto de un interesante debate histórico y filológico, pues se trata de un problema central para intentar conocer cómo era el texto original de los *Elementos* y otras obras antiguas. Los matemáticos de lengua árabe recogieron el testigo de la labor de comentario, elucidación y reflexión sobre el texto euclidiano desarrollada por los estudiosos de la época final de la Antigüedad. De hecho, de los comentarios de las obras de Euclides escritos por Herón y por Simplicio tenemos información gracias a las referencias a ellos incluidas en el

comentario escrito en la primera mitad del siglo X por al-Nayrizi (865-922); y el comentario de Pappus del Libro X de los *Elementos* ha llegado hasta nosotros sólo en su traducción árabe, que data de la misma época. Sin embargo, el espíritu de los autores que trabajaron en las tierras del islam era distinto del de sus inmediatos predecesores. Estos últimos fueron unos pocos estudiosos aislados, esparcidos por la amplia geografía de un mundo que poco a poco se iba derrumbando y que se aferraban intelectualmente a las obras excelsas del pasado. La tradición euclidiana árabe constituyó la labor sistemática de un amplio grupo de estudiosos, de una comunidad erudita estructurada. Una gran riqueza de puntos de vista y la continuidad en el tiempo garantizada por los discípulos de los grandes maestros permitieron explorar nuevos problemas y abrir nuevas vías en la investigación matemática.

El trabajo sobre el texto de los *Elementos* y el deseo de comprenderlo mejor invitaba sin duda a concentrarse sobre su estructura y su trabazón lógica y a examinar los problemas filosóficos relativos a la existencia y la construcción de los objetos matemáticos. Pero además, los matemáticos de lengua árabe introdujeron nuevas perspectivas en su lectura de la obra, y de esta lectura partieron una gran cantidad de líneas de investigación originales. Las dos primeras traducciones, hoy perdidas, fueron realizadas por al-Hajjaj ibn Yusuf ibn Matar, siendo califa al-Ma'mun. Este estudioso trabajaba en la Casa de la Sabiduría, una institución creada en Bagdad para animar el estudio y la investigación. En los mismos años trabajaba allí Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, matemático y astrónomo, el creador del álgebra árabe. La obra de Euclides influyó en el trabajo innovador de al-Khwarizmi, como lo demuestra el hecho de que éste, para demostrar las fórmulas de solución de los distintos tipos de ecuaciones algebraicas de grado dos, utilizó razonamientos basados en la igualdad de áreas de rectángulos del tipo de los que aparecen en

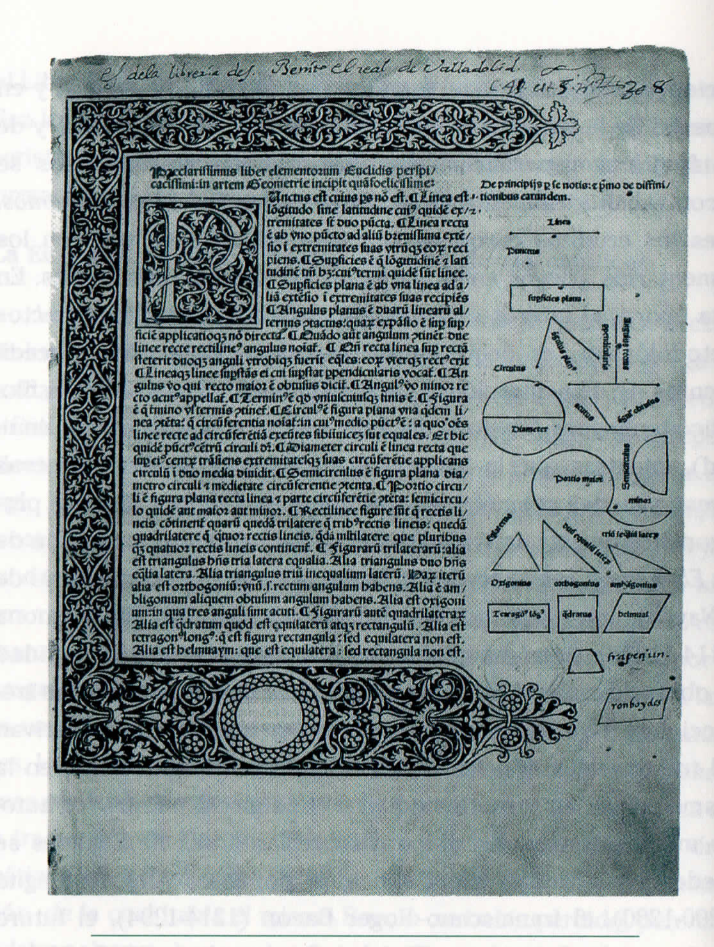
el Libro II de los *Elementos*. El punto de vista del álgebra, que unifica los problemas de aritmética y de geometría, es el sello característico de la investigación matemática árabe, y marcó la interpretación de los *Elementos* en este contexto cultural.

La Europa medieval: Euclides, maestro de matemáticos

La traducción de los *Elementos* al árabe fue la puerta de acceso de los estudiosos de los países del islam a la matemática griega -al trabajo del propio Euclides y al de otros autores como Arquímedes o Diofanto- e inauguró así una tradición de investigación independiente en matemáticas en dicha área cultural. Cuando, a partir del siglo XII, en Europa la vida económica, social y cultural comenzó a mostrar un mayor dinamismo -con el desarrollo de las ciudades y la fundación de las universidades- su traducción al latín marcó una vez más el inicio de los estudios matemáticos. También aquí se realizaron numerosas traducciones, y esta labor fue acompañada por la progresiva elaboración de una *nueva* terminología matemática latina usando palabras derivadas del griego y del árabe. Hasta entonces, los pocos estudiosos dispersos en monasterios o cortes europeas podían leer en latín sólo ciertas partes de la obra euclidiana en la traducción de Boecio, un erudito romano que vivió en los dramáticos años finales del siglo V e inicios del siglo VI. Esta traducción -de la cual habla el mismo Boecio- se había perdido, pero circulaban obras sobre geometría teórica o geometría práctica aplicada a la agrimensura basadas probablemente en ella, y algunas atribuidas falsamente al estudioso romano. En torno al año 1170 fue compuesta una nueva traducción latina, a partir del texto griego, cuyo autor no conocemos. Todas las demás, sin embargo, estaban basadas en las traducciones árabes, pues en aquellos años la península Ibérica y Sicilia representaron un lugar de encuentro cultural entre la Europa cristiana y el mundo islámico.

Las traducciones realizadas en Europa indujeron, una vez más, una labor de comentario y elucidación de la obra griega, que continuaría durante los siglos XIII y XIV y que refleja las preocupaciones intelectuales del mundo cristiano-latino medieval y en especial de la filosofía escolástica. Así, a través del tiempo y de las fronteras geográficas, estudiosos de mundos diversos se encontraban idealmente en el debate en torno a los *Elementos*, pues los eruditos europeos se confrontaron a su vez con los comentarios griegos antiguos y con los comentarios árabes. En esta época, el interés se concentró sobre todo en los aspectos metodológicos, es decir, en su estructura lógica, los procedimientos de demostración y las definiciones y en problemas filosófico-teológicos (como la idea de infinito o la idea de continuidad), mientras que la lectura de Euclides no estimuló nuevas investigaciones geométricas o aritméticas. Citemos algunos protagonistas de esta actividad matemática. La mejor traducción de los *Elementos*, así como de los *Datos*, la *Óptica* y el comentario de al-Nayrizi, fue preparada en Toledo por Gerardo de Cremona (1114-1187), que tradujo del árabe y del griego una gran cantidad de obras de matemáticas. Sin embargo, la mayor parte de las traducciones o versiones que circularon en aquel periodo derivan del trabajo del traductor inglés Adelardo de Bath (activo en la misma época, en torno a mediados del siglo XII). Entre los autores medievales que escribieron sobre las obras de Euclides se pueden citar varios eclesiásticos: el dominico Alberto Magno (1200-1280), el franciscano Roger Bacon (1214-1294), el futuro arzobispo de Canterbury Thomas Bradwardine (1295-1349) y, sobre todo, Giovanni Campano da Novara (c.1220/30-1296), capellán apostólico del papa.

Campano, matemático y astrónomo competente, preparó una edición latina comentada de los *Elementos* basada en la traducción de Adelardo a partir del árabe, que tuvo una gran circulación. De hecho, para realizar la primera versión impresa de los *Elementos* de Euclides fue elegida precisamente la traducción de Campano, publicada en Venecia en 1482 bajo el título *Preclarissimum opus elementorum Euclidis megarensis una cum commentis Campani perspicacissimi in arte geometrica*. Se trata de


Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspicacissimi: in artem Geometrie incipit quam foelicissime:

De principiis p se notis: e pmo de diffinitionibus earundem.

Primera página de la impresión de los *Elementos* realizada en Venecia en 1482 por el impresor Erhard Ratdolt con la traducción latina de Giovanni Campano da Novara.

uno de los primeros libros de matemáticas que vieron la luz después de la invención de la imprenta, libros que exigían un gran trabajo al impresor debido a las figuras geométricas y a la dificultad de evitar las erratas, que comprometían gravemente la comprensión del texto.

Esta versión de Campano marca, en los albores del Renacimiento, una modificación profunda en el papel de la obra

de Euclides en la cultura matemática. Desde su composición 1500 años antes hasta entonces, los *Elementos* habían representado el principal punto de referencia en el desarrollo de la investigación matemática. La cultura europea medieval les confirió un valor fundamental en la formación del hombre culto en el marco de las siete artes liberales. Las artes liberales (el saber *superior* cultivado por sí mismo, a diferencia del saber práctico de las artes *mecánicas*) estaban divididas en dos grupos: el *trivium,* formado por la retórica, la gramática y la dialéctica, y el *cuadrivium*, en el que encontramos el eco de la división de las matemáticas discutida por los autores griegos, esto es, aritmética, geometría, astronomía y música. Estas disciplinas constituían la materia de estudio en la facultad de artes de la universidad, donde los estudiantes se preparaban para las facultades mayores de medicina, teología y derecho. Como consecuencia de ello, muchos estudiosos trabajaron sobre los *Elementos* para adaptarlos a su papel didáctico, aclarándolos o compilando ediciones abreviadas. Junto a ediciones de buen nivel, como la de Campano, fueron preparadas y publicadas otras menos rigurosas. Este nuevo papel institucional como manual de enseñanza de las matemáticas, y especialmente de la geometría, se mantendrá durante siglos, y constituye el motivo principal por el que esta obra -en multitud de versiones y traducida a un gran número de lenguas- continuara editándose hasta el siglo XIX.

Euclides y la evolución de la matemática moderna

En el siglo XVI, tras la invención de la imprenta, las ediciones de Euclides se multiplicaron. Muchas de ellas estaban guiadas por un interés didáctico, sin ninguna preocupación por reflejar fielmente el texto clásico o por profundizar los aspectos más complejos de la matemática euclidiana. Otras estuvieron guiadas por una preocupación filológica: el interés típico de los humanistas del Renacimiento por el conocimiento de los textos clásicos originales condujo a una serie de ediciones basadas en manus-

La traducción de los Elementos *al chino*

Una de las ediciones modernas de más éxito de los Elementos *fue publicada en 1574 por el jesuita Christoph Schlüssel (1538- 1612), más conocido como* Clavio *o* Clavius, *profesor en el colegio de la Compañía de Jesús en Roma. Se trataba de una traducción al latín acompañada de numerosos comentarios y complementos. Uno de los alumnos de Clavio fue el jesuita italiano Matteo Ricci (1552-1610), que en 1583 viajó como misionero a China, donde existía una tradición de estudios matemáticos y de astronomía matemática, independiente de las matemáticas griegas, a la que el emperador y la clase culta daban un gran valor. Ricci utilizó una ingeniosa estrategia para intentar convertir a los gobernantes chinos al cristianismo que consistió en procurar difundir la cultura científica europea y mostrar su superioridad, sobre todo en el campo de las previsiones astronómicas. A este fin emprendió la traducción de los seis primeros libros de los* Elementos, *en colaboración con el alto funcionario y erudito Xu Guangqi (1562-1633), utilizando la edición de su maestro romano. El resultado fue la obra* Jihe yuanben *(*Elementos de geometría, *1607).*

La introducción de las matemáticas de matriz griega en China fue, sin embargo, muy lenta; en realidad, fue una de las consecuencias de la radical ruptura con el pasado que se produjo en el siglo XX. Sólo en 1857 el matemático Li Shanlan (1811-1882) completó la traducción de los Elementos, *de nuevo en colaboración con un misionero y sinólogo inglés, Alexander Wylie (1815-1887), usando la traducción inglesa de Robert Simson (1687-1768). Esta labor propició la creación de una terminología matemática*



EVCLIDIS ELEMENTORVM LIBRI XV

ACCESSIT XVI. DE SOlidorum Regularium comparatione.

OMNES PERSPICVIS DEmonstrationibus, accuratisq; scholiis illustrati.

AVCTORE

CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI. SOCIETATIS IESV.

ROMAE, Apud Vincentium Accoltum. 1574.

Portada de la edición de 1574 de los *Elementos* publicada por Clavius.

en chino, de modo análogo a lo ocurrido en otros ámbitos lingüísticos. Sin embargo, el método deductivo euclidiano tardó aún en ser aceptado y asimilado, y el mismo Li fue un defensor de la tradición matemática china. Sólo con el establecimiento de la república china, tras la revolución del 1911, el rechazo de la cultura clásica y la apertura a las ideas occidentales llevó a abandonar definitivamente el simbolismo matemático tradicional y a la introducción de la matemática occidental en la enseñanza.

critos griegos que mejoraran la precisión de la versión de Campano basada en las traducciones árabes (el trabajo iniciado entonces ha conducido a la edición hoy generalmente aceptada). Poco a poco, el lenguaje de los *Elementos*, su método y sus contenidos fundamentales se difundieron entre los hombres cultos, creando una cultura matemática básica compartida por estudiosos de todos los lugares de Europa. Fue éste el primer paso, de nuevo en esta ocasión favorecido por la obra de Euclides, del espectacular desarrollo de las matemáticas en la Europa moderna.

¿Cuál fue la actitud de los estudiosos de aquella época ante la herencia de Euclides? La respuesta a esta pregunta debe contemplar diversos aspectos. Hemos visto que la labor crítica de corrección de su obra, y especialmente de los *Elementos*, ha sido una constante en la historia, desde la misma época griega y a lo largo del Medioevo, tanto entre los matemáticos musulmanes como entre los estudiosos cristianos. Ahora bien, hemos subrayado el hecho de que esta crítica no llevó consigo el rechazo o superación de los fundamentos contenidos en el texto, que demostraba así la genialidad de su composición.

La cultura de la Europa moderna tuvo sus raíces en la puesta en discusión del principio de autoridad y de la visión del mundo establecida por la escolástica medieval asimilando en el ámbito de la



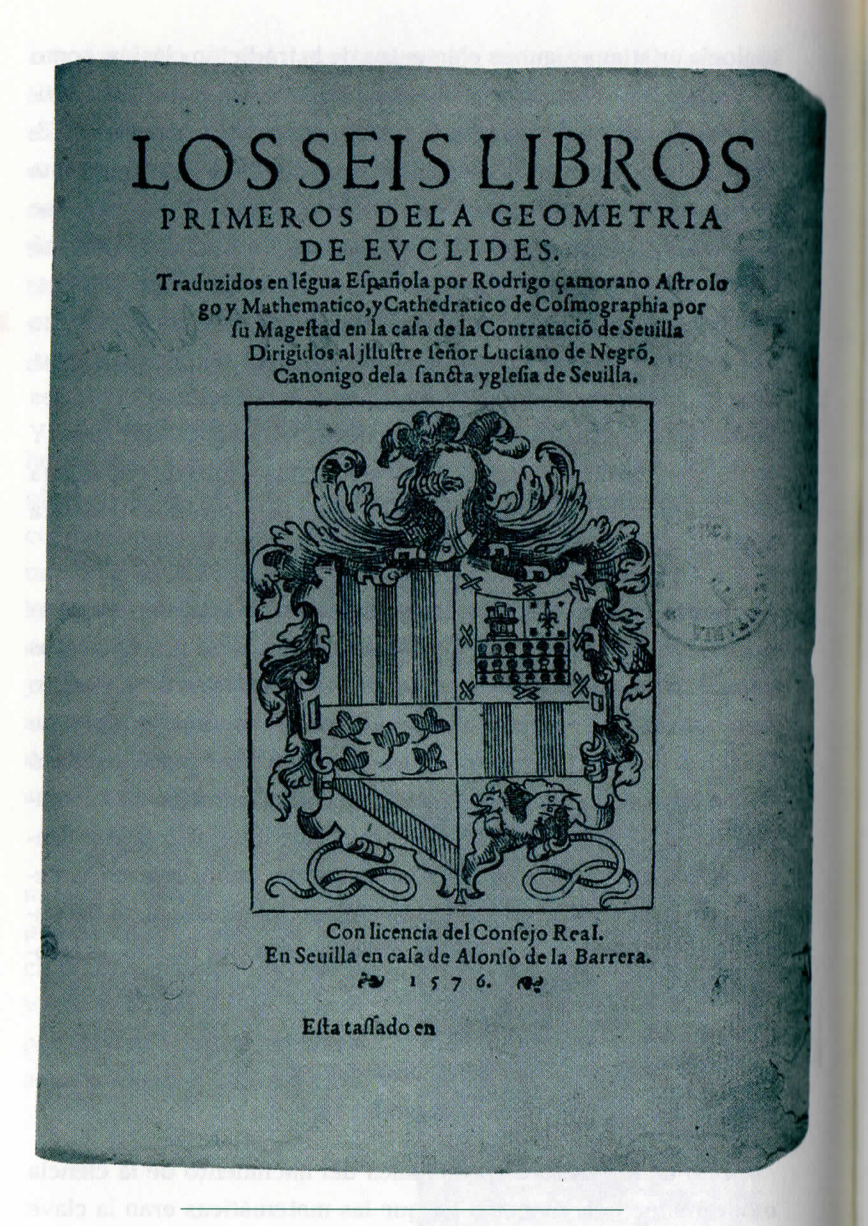
Portada de la primera edición en inglés de los *Elementos*, realizada por *sir* Henry Billingsley en 1570.

teología cristiana algunos elementos de la tradición clásica, como la filosofía de Aristóteles y la astronomía de Tolomeo. Esta actitud libre y crítica de grandes pensadores como Copérnico (1473-1543), Giordano Bruno (1548-1600) o Galileo (1564-1642) fue una de la bases del nacimiento de la ciencia moderna. Sin embargo, se puede afirmar que el prestigio de la obra de Euclides atravesó esta época de ruptura intelectual sin sufrir mella, como demuestra su uso en la enseñanza. El lenguaje geométrico euclidiano fue utilizado por Galileo y por Isaac Newton (1643-1727) en sus estudios de mecánica y de astronomía, que establecieron las bases del enfoque científico en el estudio de los fenómenos naturales. Y hasta bien entrado el siglo XIX, en efecto, la geometría euclidiana fue generalmente considerada como una descripción matemática del espacio físico real.

Ahora bien, a partir de la época de Galileo los límites de la doctrina contenida en los *Elementos* comenzaron a ser puestos dramáticamente en evidencia. Comenzaba entonces un itinerario matemático que llevaría a superar definitivamente la obra de Euclides. Fue un proceso que duró mucho tiempo y que atravesó varias fases, marcadas por la crisis de varios aspectos de la compleja obra euclidiana. Pero, sobre todo, este itinerario estuvo ligado a algunas de las grandes conquistas del conocimiento matemático moderno: la invención del cálculo infinitesimal, el descubrimiento de las geometrías no euclidianas y, por último, la axiomatización de las matemáticas y la crisis de los fundamentos.

La crisis de la teoría de las proporciones y el nacimiento de la ciencia moderna

Uno de los factores principales del nacimiento de la ciencia moderna fue la convicción de que las matemáticas eran la clave para descifrar el misterio del Universo. A la difusión de esta idea contribuyó poderosamente el interés suscitado por la tradición filosófica pitagórica y platónica en el Renacimiento. La afirmación



LOS SEIS LIBROS
PRIMEROS DELA GEOMETRIA
DE EVCLIDES.
Traduzidos en légua Eſpañola por Rodrigo çamorano Aſtrologo y Mathematico, y Cathedratico de Coſmographia por ſu Mageſtad en la caſa de la Contratació de Seuilla
Dirigidos al jlluſtre ſeñor Luciano de Negró, Canonigo dela ſancta yglesia de Seuilla.

Con licencia del Conſejo Real.
En Seuilla en caſa de Alonſo de la Barrera.
1576.

Eſta taſſado en

Portada de la primera edición española de los *Elementos*, realizada por Rodrigo Zamorano en Sevilla en 1576 (edición facsímil de Ediciones Universidad de Salamanca, 1999).

El destino de la Óptica *de Euclides*

El Renacimiento y la revolución científica estuvieron marcados por una gran bullir de ideas y por la interacción entre distintos saberes. Los protagonistas de esta época extraordinaria eran a la vez científicos, filósofos, artistas e ingenieros. Terreno fértil para personas de tan gran apertura mental fueron, además de las grandes obras clásicas, como los Elementos *y los tratados de Arquímedes, obras menos importantes, como la* Mecánica *de Aristóteles o la* Óptica *de Euclides, en la que se tratan cuestiones de tipo científico-técnico.*

El caso de la óptica ilustra bien la atmósfera intelectual, animada y ecléctica, del inicio de la Europa moderna. La Óptica *de Euclides fue estudiada por los artistas del Renacimiento por sus aplicaciones a la perspectiva, cuando ya su punto de vista teórico estaba a punto de ser superado gracias a los estudios medievales. En 1604 vio la luz un importante tratado de Johannes Kepler (1571-1630) titulado* Ad Vitellionem paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur *(*Suplemento a Vitelio, exponiendo la parte óptica de la astronomía*) dividido en once capítulos, dedicados a cuestiones de óptica los cinco primeros y de astronomía los restantes. La obra era presentada por su autor como un complemento a un tratado de Vitelio (un autor activo en la segunda mitad del siglo XIII, quizá de origen polaco) titulado* Perspectiva, *que había dado a conocer en Europa los estudios de óptica geométrica árabes, y en particular la obra* Kitab al-Manazir *(*Libro de óptica*) de Alhacén o al-Hazén (Ibn al-Haytham, 965-1039).*

>>

Pero en la época de Kepler los conocimientos de óptica se habían enriquecido notablemente gracias a la experiencia técnica. La invención del catalejo no fue fruto directamente de la investigación teórica, aunque probablemente las ideas de los estudiosos se filtraban hacia círculos más amplios de personas, y en particular en este caso hacia los artesanos del vidrio y los fabricantes de lentes para corregir los defectos visuales. Kepler citaba con gran admiración ("excelente sacerdote de la naturaleza", son sus palabras) a Giambattista Della Porta, famoso estudioso de magia y de ciencias ocultas, que se había ocupado de óptica basándose en parte en los conocimientos que había adquirido en las fábricas de vidrio de Murano. Aunque hoy en día se reconoce la importancia de los escritos de Della Porta sobre estos temas, de ellos se desprende la idea de que las lentes son objetos caprichosos, capaces de engaño y de los que no cabe fiarse.

En el siglo XVII se produjo el viraje teórico de la óptica desde teoría de la visión a teoría de la luz. Se mantenía el lenguaje geométrico pero el rayo pasaba a representar la trayectoria en línea recta de la luz. En esta disciplina -como en la mecánica celeste-, el punto más alto se alcanzaría con el trabajo de Newton, en este caso con su obra Opticks, or a treatise of reflexions, refractions, inflexion and colours of light *(1704). Los estudios de óptica y de perspectiva, además, estimularon el desarrollo de nuevos estudios geométricos sobre las cónicas (Kepler introdujo la palabra* foco, *focus) o sobre las propiedades proyectivas de las figuras.*

Página de la *Kitab al-Manazir* (*Libro de óptica*) de Alhacén, que fue escrita hacia el año 1000.

más famosa es la debida a Galileo, que escribió que el libro del Universo "está escrito en lengua matemática, y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, medios sin los cuales es humanamente imposible entender ni una palabra; sin ellos se vaga en vano por un oscuro laberinto".

Galileo consideraba al lenguaje geométrico como el lenguaje matemático por excelencia, adecuado al estudio teórico de los fenómenos. Se mantenía así fiel al punto de vista que había llegado a dominar el pensamiento matemático griego y que había sido consagrado en los *Elementos*, en los *Fenómenos* y en la *Óptica* de Euclides.

En sus estudios del movimiento Galileo no utilizó cálculos numéricos sino la teoría de las proporciones euclidiana. Ahora bien, en la mecánica era necesario examinar relaciones entre espacios, tiempos y velocidades instantáneas, es decir, magnitudes que podían tomar valores infinitamente pequeños, y Galileo y sus discípulos se dieron pronto cuenta que era necesario *reformar* la teoría de las proporciones del Libro V de Euclides para poder afrontar estos problemas *infinitesimales*. Su intentó fracasó y los matemáticos de la época de la revolución científica se vieron obligados a abandonar la geometría clásica y a crear una nueva matemática para el estudio de la física.

Esta nueva matemática fue el cálculo infinitesimal, cuyo desarrollo fue posible gracias al lenguaje algebraico y a la aplicación del álgebra al estudio geométrico de las curvas. Se suele considerar que la aparición del cálculo fue una verdadera *revolución* en las matemáticas, en el sentido de que las transformó desde la raíz marcando una ruptura radical con los estudios precedentes. En realidad, los estudios matemáticos de los siglos XVI y XVII que llevaron a la creación del cálculo por parte de Newton y Gottfried W. Leibniz (1646-1716) se inspiraron en parte en la lectura de otros matemáticos griegos, Apolonio y Arquímedes. Es cierto que Newton en su gran obra *Principios matemáticos de la filosofía natural* (1687), en la que expone la teoría de la gravitación universal, prefirió utilizar el lenguaje geométrico euclidiano para garantizar el rigor de sus estudios. Sin embargo, la aplicación del cálculo al estudio de las relaciones entre magnitudes físicas hizo posible un avance espectacular de los conocimientos de astronomía, óptica y mecánica y muchas otras ramas de la moderna física matemática.

El quinto postulado y las geometrías no euclidianas

A menudo se recuerda, cuando se describe en qué consistió la revolución científica de la que nació la física moderna, el papel de las matemáticas y del método experimental. A estos factores es necesario añadir la introducción de algunas ideas nuevas que cambiaron radicalmente la manera de ver el mundo natural. Estos conceptos, que son un ingrediente esencial de la visión científica, hoy nos resultan familiares pero en su momento, a los ojos de muchos, constituían elucubraciones sin fundamento. Un ejemplo de ello es la idea de acción a distancia, fundamental en la teoría de la gravitación universal. Otra que aquí nos interesa es la idea de espacio físico, una especie de gran recipiente en el que existen los cuerpos y que podemos concebir vacío. Se trata de una idea que no existía en la ciencia antigua, y que, aunque pueda parecer sorprendente, surgió a partir de la reflexión filosófica y teológica.

Hemos dicho que el desarrollo del cálculo infinitesimal robó a la geometría euclidiana -a su visión de las magnitudes geométricas y de las relaciones entre ellas- el papel que los griegos le habían asignado en la descripción de los fenómenos físicos. Sin embargo, en la época de la revolución científica, la geometría euclidiana encontró un nuevo papel en la visión científica del mundo, no ya como ciencia de las magnitudes geométricas o de las figuras geométricas, sino como ciencia del espacio. Hemos visto que Euclides, en los cuatro primeros libros de los *Elementos*, estudia las figuras geométricas planas, como triángu-

los, paralelogramos y círculos, además de puntos y rectas. Los postulados y nociones comunes se refieren a dichos *objetos* matemáticos, que son considerados por sí mismos y no son vistos como colocados en un plano. Del mismo modo, los sólidos son considerados por sí mismos y en sus relaciones mutuas, pero no colocados en el espacio.

En la visión moderna, la geometría plana se ocupa del plano o espacio de dimensión dos como conjunto de puntos a los que se asocian coordenadas eligiendo dos rectas como ejes cartesianos. Ciertos subconjuntos de puntos forman rectas o curvas de varios tipos (con el auxilio del lenguaje algebraico, son los puntos cuyas coordenadas verifican una cierta ecuación) y entre dos puntos existe una distancia. En el plano existen triángulos y otras figuras geométricas cuya superficie se puede determinar. De la misma manera, el objeto de la geometría del espacio es el espacio tridimensional en el que se introducen coordenadas usando tres ejes cartesianos y donde existen puntos, rectas y planos.

Esta concepción se forjó gracias al desarrollo de la geometría analítica en el siglo XVII, esto es, de la aplicación del álgebra a la geometría. Tal aplicación ofrecía un nuevo punto de vista, que no invalidaba el contenido matemático de los *Elementos*. Al contrario, la obra de Euclides ofrecía una descripción cabal de las propiedades del espacio físico entendido como espacio geométrico tridimensional. Los postulados, siguiendo este enfoque, aun refiriéndose a rectas, círculos y ángulos, implícitamente establecían una serie de características físico-matemáticas intuitivas: un espacio continuo e infinito o ilimitado (los postulados 2 y 3, sobre la posibilidad de prolongar un segmento continuamente en línea recta y de describir un círculo de cualquier radio) y un espacio homogéneo, uniforme o isótropo (el postulado 4, sobre la igualdad de todos los ángulos rectos). Es más, la noción común que afirma que cosas que coinciden entre sí son iguales -que presupone una idea intuitiva, física, del movimiento de los objetos sin

deformarlos- encajaba perfectamente en este cuadro, mientras que se conciliaba peor con el enfoque euclidiano, como demuestran las discusiones que provocó entre los matemáticos y filósofos griegos. Y, en fin, desde esta perspectiva, las proposiciones de los *Elementos* eran consideradas verdades demostradas matemáticamente que extendían y precisaban el conocimiento intuitivo sobre el espacio físico.

Precisamente el contraste entre la simplicidad de los postulados y nociones comunes y su carácter intuitivo, ligado a la experiencia sensible del espacio físico, y el complicado enunciado del quinto postulado, sobre el que se basaba la teoría de las paralelas presentada en el Libro I, lo convirtió en el centro de una discusión matemática iniciada ya en época griega, proseguida por los matemáticos árabes y continuada hasta el siglo XIX. Se realizaron muchas tentativas de demostrarlo como una proposición o bien de sustituirlo con un postulado más simple, eventualmente cambiando también la definición de paralelas de los *Elementos*. El matemático árabe Ibn al-Haytham (siglos X-XI), por ejemplo, criticó dicha definición porque en ella intervenía la idea de infinito e introdujo una definición basada en la idea de equidistancia, proponiendo además una demostración del quinto postulado por reducción al absurdo. El problema del postulado de las paralelas motivó una serie de interesantes investigaciones geométricas que permitieron profundizar el conocimiento de la estructura deductiva de la geometría de Euclides y encontrar muchos resultados equivalentes al postulado euclidiano.

En la geometría de Euclides, dado un punto exterior a una recta existe siempre una paralela a la recta dada y además dicha recta es única (el quinto postulado sirve precisamente para demostrar que es única). Esta afirmación nos resulta inmediatamente intuitiva pensando en la operación gráfica que podemos realizar en un papel con escuadra y cartabón. Los estudiosos que discutieron el quinto postulado, aun aquellos que consideraban

EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

Portada de la obra *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733) de Girolamo Saccheri.

mejorable la exposición de Euclides, compartían en definitiva la convicción de que la teoría de las paralelas de los *Elementos* recogía la verdad de las propiedades del espacio físico. Su objetivo era presentar a Euclides *liberado* de todo defecto, como escribió el jesuita italiano Girolamo Saccheri (1667-1733) en el título de su obra *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733). Paradójicamente, Saccheri, siguiendo la metodología de reducción al absurdo, exploró las propiedades matemáticas de un espacio geométrico en el que no se requiere el quinto postulado, es decir, en el que existe la paralela pero no es única, y también el de un espacio geométrico sin paralelas. Es más, los griegos ya conocían un ejemplo de un *ambiente geométrico* en el que no existían las paralelas: la geometría de la esfera, que fue explorada atentamente por su conexión con el modelo cosmológico de Eudoxo.

El primer matemático que concibió la idea abstracta de un espacio geométrico no euclidiano desde el punto de vista de la teoría de las paralelas fue el llamado *príncipe* de los matemáticos, el alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Era necesario un salto conceptual radical -alejándose de la idea de la geometría como ciencia del espacio físico real- para pensar el espacio como una idea general y colocar la geometría euclidiana con igual dignidad junto a otras geometrías no euclidianas (la geometría hiperbólica, sin unicidad de las paralelas, y la geometría elíptica, sin paralelas). Además, para difundir una idea de este tipo era necesario enfrentarse con la oposición de los defensores de una visión tradicional, motivo por el cual Gauss decidió no publicar sus ideas. Sin embargo, era imposible poner freno a las fértiles investigaciones geométricas del siglo XIX, y otros estudiosos como János Bólyai (1802-1860) y Nikolai I. Lobachevski (1792-1856), llegaron independientemente a las mismas conclusiones que Gauss.



N. Lobachevski. Más información sobre su vida y su obra en el libro *Lobachevski. Un espíritu indomable*, de Santiago Fernández Fernández, en esta misma colección.

Se produjo a continuación un animado debate entre defensores y

detractores de estos nuevos puntos de vista en matemáticas. Era el final del reinado bimilenario de la geometría euclidiana.

De los *Elementos* a la matemática axiomática

Otro salto de generalidad y abstracción en la concepción del espacio geométrico fue el realizado por Bernhard Riemann (1826-1866). Todas estas sorprendentes investigaciones llevaron a una nueva y cuidadosa lectura de la estructura deductiva de los *Elementos* de Euclides, a los postulados enunciados en la obra y a otros utilizados implícitamente. Esta labor fue iniciada por Moritz Pasch (1843-1930) en sus *Lecciones de geometría moderna* (1882) y culminó con la obra de David Hilbert (1862-1943) *Fundamentos de geometría* (1899). En la obra de Pasch aparecen las definiciones de los objetos fundamentales de la geometría junto a los axiomas; su objetivo principal era clarificar los cimientos teóricos de la geometría entendida siempre como ciencia del espacio físico.

La concepción de Hilbert suponía una revisión mucho más radical del significado de la geometría. De una manera casi provocativa, Hilbert escribía que en su libro que las palabras *punto*, *recta* y *plano* podían ser sustituidas por *silla*, *mesa* y *jarra de cerveza* sin que perdiera validez la teoría que allí se presentaba. Explicaba así que los objetos geométricos dejaban de ser definitivamente el foco de la geometría y que era inútil intentar recoger en una definición precisa la idea intuitiva de los elementos básicos de la geometría euclidiana como recta o punto, que perdían así su carácter concreto ligado a la realidad física. Pasaban a primer plano los axiomas o enunciados sin demostración, que indicaban las relaciones entre dichos objetos abstractos, no definidos. El valor de la geometría no residía en la relación con el espacio real, sino en la coherencia o compatibilidad entre los axiomas, esto es, el hecho de que no existiera contradicción entre ellos. La geometría euclidiana correspondía así a un cierto conjunto de axiomas;

> ### *La geometría y el mundo físico*
>
> *"La relatividad del concepto de geometría, como consecuencia del trabajo de Riemann, ha llegado hasta tal punto que H. Poincaré pudo mantener que carece de sentido preguntar cuál geometría es la verdadera [...] La demostración de la independencia del quinto postulado de Euclides contribuye poderosamente a la afirmación de una distinción entre el espacio físico y el espacio geométrico de los matemáticos. Sin duda hay ya en los griegos y muy particularmente en Platón una clara distinción entre la geometría y el conocimiento empírico de la realidad; y asimismo Kant reflexionando sobre el increíble renacimiento científico establece una diferencia entre la geometría de los juicios sintéticos a priori y el conocimiento empírico de la realidad mundana construido necesariamente a posteriori. Pero para todos ellos, como para Saccheri y al parecer incluso para Gauss en 1830, existe una correspondencia necesaria y biunívoca entre los teoremas de la geometría y las aplicaciones de éstos a la realidad del espacio en que vivimos. La creación de las geometrías elementales no euclídeas y sobre todo el famoso discurso (1854) de Riemann fuerzan definitivamente la independencia de la geometría de todo fundamento en el espacio de la física."*
>
> A. Dou, *Fundamentos de la matemática* (1974[2]), pp. 44-45.

Los axiomas de la geometría euclidiana

En los Fundamentos de la geometría *Hilbert describe los siguientes cinco tipos de axiomas geométricos: axiomas de incidencia, de orden, de congruencia, axioma de paralelismo y axioma de continuidad (que garantiza que los puntos de una recta puedan ser identificados con los números reales). Algunos de estos axiomas corresponden a los postulados identificados por Euclides. Otros son usados en los* Elementos *implícitamente, como los axiomas de orden -identificados por Pasch- que son usados en la teoría de las paralelas. Otros son introducidos como teoremas, como los axiomas de congruencia que se demuestran en los* Elementos *sobre la base de una idea intuitiva de superposición de figuras (que equivale a admitir ciertos movimientos rígidos en el plano). Hilbert demuestra que los cinco grupos de axiomas determinan únicamente (salvo isomorfismo) el plano euclidiano, que puede ser visto como el plano de la geometría analítica sobre el cuerpo de los números reales.*

las dos geometrías no euclidianas, elíptica e hiperbólica correspondían a otros axiomas y se podía pensar en nuevas geometrías con selecciones diferentes de axiomas.

El enfoque propuesto por Hilbert es conocido como método axiomático. Su alcance iba mucho más allá del campo de la geometría, pues se trataba de un modo de construir y presentar cualquier teoría matemática. Para ilustrarlo eligió la geometría, puesto que su propuesta representaba en cierto modo una revisión moderna de la presentación de la geometría contenida en los *Elementos* de Euclides, radical ciertamente, pero que constituía una respuesta al mismo problema de depuración conceptual y clarificación de las bases de las matemáticas afrontado en la obra del matemático griego. El libro de Hilbert cerraba no sólo cronológicamente sino simbólicamente el siglo XIX en cuanto periodo caracterizado por una exigencia de rigor cada vez mayor en todas las ramas de las matemáticas: la geometría, el análisis matemático y la aritmética. El método axiomático representaba una vía para reescribir todas las matemáticas en un modo perfectamente correcto desde el punto de vista lógico y para tener *bajo control* los fundamentos de las diferentes teorías de manera que los matemáticos pudieran proseguir sus investigaciones con la confianza de trabajar sobre una base sólida.

El desarrollo de la axiomatización confirmó una vez más la interrelación entre las diferentes disciplinas matemáticas. Con su axiomatización de la geometría euclidiana Hilbert redujo el problema de su correcta fundamentación al problema de la fundamentación del número real, la base del análisis; y esta fundamentación a su vez se reducía a la fundamentación de la aritmética, esto es, de los mismos números *naturales*. Estos se convertían en la base de las matemáticas, una base que parecía más sólida que la vieja convicción de que la geometría euclidiana era *verdadera* en cuanto reflejo del espacio físico. Como había afirmado el matemático alemán Leopold Kronecker (1823-1891), *"Dios creó los números naturales, todo lo demás es obra de los hombres".*

Las pesquisas de los matemáticos en torno a las bases mismas de su milenaria disciplina, sin embargo, pusieron en cuestión incluso la aritmética. En el periodo en torno al cambio de los siglos XIX y XX se desarrollaron muchos estudios de lógica matemática que ofrecieron los instrumentos para analizar cuidadosamente este tipo de problemas. Quizá más que en ningún otro periodo histórico -incluyendo la época clásica de las matemáticas griegas- los matemáticos se entusiasmaron y participaron en la discusiones filosóficas y epistemológicas sobre su propia disciplina. La curiosidad había hecho entrar a los matemáticos en un terreno minado, pues después de decenios de paradojas, discusiones, decepciones y aparentes éxitos, el resultado final fue radicalmente negativo. No

podemos entrar aquí a analizar estos debates: recordemos simplemente que los estudios de Kurt Gödel (1906-1978) relativos al problema de la consistencia de la aritmética dieron un golpe definitivo a la idea de certeza matemática. Nos interesa subrayar, sin embargo, que esta evolución no impidió que el enfoque axiomático de Hilbert se consolidara definitivamente como modo de proceder en la construcción de las teorías matemáticas y en la escritura de nuevos resultados matemáticos.

Durante siglos, los *Elementos* de Euclides habían cimentado la cultura matemática universal. En los años iniciales del siglo XX, los

¡Abajo Euclides!

Esta exclamación se puede leer en un libro publicado en 1968 por uno de los más importantes matemáticos del grupo Bourbaki, Jean Dieudonné (1906-1992), titulado Álgebra lineal y geometría. *La geometría elemental no debía seguir siendo enseñada siguiendo la pauta de los* Elementos *y sin recurrir al álgebra. Esa geometría era una* antigualla, *afirmaba Dieudonné, porque ha quedado claro que bajo los estudios clásicos se escondía la limpidez de la moderna álgebra lineal. De la misma manera, la visión de las matemáticas bourbakista y en particular el papel primordial asignado a la teoría de conjuntos indujo en las décadas centrales del siglo XX a introducir en la enseñanza elemental en muchos países la llamada* matemática moderna, *que eliminaba el recurso a ideas intuitivas sobre el número o la geometría.*

En la enseñanza elemental se ha echado marcha atrás a la vista de los efectos negativos en el rendimiento escolar y en la actitud de los alumnos hacia las matemáticas, pero sigue hoy abierto el debate sobre la oportunidad de

matemáticos tenían por fin a su disposición un instrumento apropiado para sustituir a la gran obra griega con una obra análoga moderna: el método axiomático. En los siglos intermedios, sin embargo, las matemáticas se habían desarrollado de manera desmesurada y tal obra análoga no podía ser la tarea de una persona sola, y mucho menos ocupar sólo trece rollos de papiro. La iniciativa fue emprendida en los años treinta por un grupo de jóvenes matemáticos franceses que emprendió el ambicioso proyecto de escribir una obra que recogiera el conjunto de las matemáticas modernas. Tratándose de una labor de equipo eligieron un seudónimo colectivo, el nombre de

superar el estilo bourbakista en la exposición de las matemáticas en las aulas y en los manuales universitarios para transmitir una visión cabal de la disciplina, sus métodos y su relación con la ciencia y la cultura. El motivo es doble. En primer lugar, tal exposición refleja el modo en el que se presentan las teorías matemáticas en su versión más elaborada, cuando ya han sido estudiadas y desarrolladas hasta llegar a formularlas de manera perfectamente rigurosa en un lenguaje formalizado y siguiendo las reglas de la lógica matemática. Efectivamente, persiste y se ha agudizado, en la matemática contemporánea, la dicotomía entre la rígida sucesión de premisas y teoremas que constituye el resultado de la investigación matemática y la vía, mucho más libre e imprevisible, por la que procede efectivamente tal indagación. En segundo lugar, la evolución histórica de las matemáticas muestra que es característico de esta disciplina la continua hibridación de teorías y conceptos, que se presentan una y otra vez bajo semblantes diversos, y es dudoso que la visión dominante en una cierta época sea la concepción definitiva: unas matemáticas sin memoria y sin pasado se empobrecen y empobrecen a quien se dedica a su estudio.

un general francés del que se conserva una estatua en la ciudad francesa de Nancy, Nicolas Bourbaki. La obra de Bourbaki empezó a ser publicada en fascículos a partir de 1938 bajo el título *Elementos de matemática*, que hacía referencia a la concepción de la disciplina que compartían los miembros del grupo. La idea era escribir unos *elementos* en versión moderna, siguiendo el método axiomático. La matemática (en singular) era considerada por ellos un edificio único, dotado de una clara estructura interna que podía ser puesta en evidencia describiéndolo ordenadamente desde sus cimientos. Y los cimientos de la disciplina eran la teoría de conjuntos, construida según los principios de la lógica matemática, a partir de la cual se podían introducir correctamente los conceptos matemáticos, desde los más simples e intuitivos (como el concepto de número natural) hasta los más elaborados en el marco de las teorías correspondientes: álgebra, topología, teoría de funciones, etc.

Así como los *Elementos* de Euclides marcaron la historia de la enseñanza de las matemáticas durante siglos, también el enfoque del grupo Bourbaki ejerció una notable influencia en este ámbito, primero en Francia, un país de gran tradición matemática, y más adelante en muchos otros países.

Pero aquí, bien entrado el siglo XX, se detiene -ahora sí definitivamente- nuestro viaje en el tiempo. Este breve repaso de la historia reciente en el último parágrafo del libro ha mostrado cómo la obra de Euclides dio todavía nuevos frutos a través de su misma discusión radical en la era de la matemática moderna. Los *Fundamentos de la geometría* de Hilbert y los *Elementos de matemática* de Bourbaki destronaron definitivamente a los *Elementos* de Euclides de su lugar como numen tutelar de la investigación matemática.

Hoy en día los *Elementos* son principalmente un testimonio del pasado, de ese pasado cuyo conocimiento, también en matemáticas, es siempre garantía de un trabajo fértil, y que alimenta nuestro espíritu en la búsqueda -exigencia fundamental en la vida de toda persona- del sentido profundo de la aventura humana.

Para saber más...

Este libro es una iniciación a la figura de Euclides y a los *Elementos*, así como una pequeña ventana abierta hacia algunos temas de la matemática griega. Al final de esta nota figura una lista de los libros y artículos que nos han guiado en su escritura junto a otras referencias de obras de consulta general. La labor de los historiadores de la matemática antigua, que tiene a sus espaldas una riquísima tradición erudita, prosigue hoy en día con vitalidad retomando viejas discusiones vistas bajo enfoques novedosos, en parte fruto de las ideas desarrolladas en la segunda mitad del siglo XX sobre texto, contexto, deconstrucción y argumentación. A continuación presentamos algunas sugerencias para profundizar en los temas que hemos tratado en varias direcciones (las referencias completas se encontrarán en la lista de referencias bibliográficas).

Para el lector con menos conocimientos, podemos remitir a las obras de historia de las matemáticas disponibles en castellano, como por ejemplo KLINE *1992 y* REY PASTOR- BABINI *1984, así como a AA. VV. 1986. A partir de ellas se podrá construir un itinerario personal de lecturas, que avanzará a medida que profundice sus conocimientos matemáticos. En la biografía de Pitágoras publicada en esta misma colección encontrará información sobre los aspectos de los Elementos de Euclides que están más ligados a la escuela pitagórica, como la aritmética y la teoría de los sólidos platónicos. Si su interés se centra sobre los rasgos de la actividad matemática que la figura Euclides nos ha invitado a considerar puede consultar* DAVIS–HERSH *1988 y* GUZMÁN *1991. Sobre la ciencia griega y la cultura helenística se puede acudir a obras generales (citamos la traducciones castellanas) como* BIANCHI BANDINELLI *1983,* GEYMONAT *1985 o* TATON *1988.*

Un camino que resulta natural emprender, tras la lectura de los fragmentos de los *Elementos* que hemos citado en el capítulo 4, es la lectura de los *Elementos* en versión castellana. La edición más reciente es la publicada en la Biblioteca Clásica Gredos (EUCLIDES a) traducida y anotada por María Luisa Puertas Castaños a partir de la edición de referencia del texto griego de los *Elementos*, que fue establecida por el filólogo danés Heiberg en los cuatro primeros volúmenes -publicados en Leipzig entre 1883 y 1886- de las obras completas de Euclides (*Euclidis Opera Omnia*). Es fácil intuir, sin embargo, que se trata de una lectura complicada. Las notas de la traductora acompañan al lector eficazmente, combinando observaciones sobre los diversos aspectos implicados en una correcta comprensión del texto. Una labor análoga ha sido realizada por Paloma Ortiz García para otras dos obras de Euclides que hemos considerado en el capítulo 5, la *Óptica* y los *Fenómenos* (EUCLIDES b).

El trabajo de los historiadores de las matemáticas que se ocupan del mundo griego presenta múltiples facetas. Existe un aspecto filológico, relativo a las fuentes primarias que han llegado hasta nosotros, las múltiples variantes de los textos, su mayor o menor fiabilidad y las varias ediciones y traducciones; y existe un aspecto lingüístico y terminológico relativo a la interpretación del texto griego con el auxilio de las traducciones al latín, al árabe y a otras lenguas. Tema de amplia discusión es la información, siempre de segunda mano, sobre la vida y los estudios matemáticos de los diferentes autores, entre ellos Euclides, y otros como Eudoxo y Teeteto. En matemáticas se ha dado siempre mucha importancia, tanto en el pasado como en el actualidad, a la atribución correcta de la prioridad en la demostración de un resultado matemático, y por tanto ríos de tinta han corrido para argumentar -sobre la base de testimonios que ofrecen siempre un margen de duda- qué partes de los *Elementos* son en realidad obra de quién y a qué época se remontan las ideas de este o aquel libro. La mayor parte de esta literatura histórica, sin embargo, no se puede leer en español.

Una presentación de conjunto de estas cuestiones, erudita y a la vez clara, aparece en la "Introducción general" a la edición de Gredos de los *Elementos* escrita por Luis Vega (EUCLIDES a, vol. 1: 7-184). En particular, se tratan aquí temas que en este libro no cabía sino mencionar, como las versiones y ediciones de los *Elementos* (incluyendo un detallado estudio de 16 versiones de los *Elementos* publicadas en España en los siglos XVI-XVIII, que presenta gran interés en la reconstrucción de la evolución histórica de la matemáticas en dicho periodo en nuestro país). Pero sobre todo, este estudio tiene particular interés para quien desee un acercamiento a la evolución del método axiomático y la idea de demostración en matemáticas. Sobre estos temas se puede consultar además otra obra de este autor, *La trama de la demostración* (VEGA 1990) y, en inglés, el reciente libro de Reuven Netz *The shaping of deduction in Greek mathematics* (NETZ 1999).

Un estudio detallado de la estructura lógica de los *Elementos* es el libro de Ian Mueller, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements* (MUELLER 1981) que constituye al mismo tiempo una guía a la lectura, descubre los puntos débiles y los puntos de fuerza de dicha estructura y afronta en profundidad temas como la cuestión del álgebra geométrica. Una segunda guía útil a la lectura es el libro de Benno Artmann, *Euclid. The creation of mathematics* (ARTMANN 1999), especialmente si se desea conocer mejor el contenido matemático de los *Elementos*, la relación entre las distintas partes de la obra y la visión moderna de los problemas afrontados en el clásico griego.

Los *Elementos* han servido, durante siglos, como libro de texto de la enseñanza *elemental* por excelencia. Este papel fue a menudo discutido desde un punto de vista didáctico, y siguió siendo reafirmado hasta bien entrado el siglo XIX (un manual clásico en este sentido es BETTI–BRIOSCHI 1868). La introducción de la matemática moderna en el siglo XX acabó para siempre

con este primado, salvo en los países anglosajones (véase por ejemplo JACOBS 1987; y una obra a contra corriente de su época, Guzmán, 1977). Cerrada esta fase didáctica, cabe preguntarse si el *olvido* total de los *Elementos* no sea un daño mayor que la vieja defensa a ultranza de su valor en la enseñanza. Es un tema sobre el que reflexionar y existen muchas publicaciones recientes que pueden ser útiles en este sentido.

La lectura de los *Elementos* hoy en el nivel universitario tiene un doble valor, cultural y matemático, y puede ser un interesante ingrediente en un curso general de matemáticas e incluso el hilo conductor, por ejemplo, de un curso elemental de geometría, o de un curso de *matemática elemental desde un punto de vista superior* útil para los futuros profesores de matemáticas. Los profesores disponen de dos libros recientes que pueden resultar muy útiles a este fin: el libro de Artmann ("un intento de comprender la naturaleza de las matemáticas desde el punto de vista de su fuente antigua más importante") y, desde un punto de vista más técnico, el libro de Robin Hartshorne *Companion to Euclid. A course of geometry, based on Euclid's Elements and its modern descendants* (HARTSHORNE 1997). Son útiles además, dos ediciones modernas de Euclides: la clásica edición inglesa de Thomas L. Heath (EUCLIDES d) y la edición francesa de Bernard Vitrac (EUCLIDES c).

Si se emprende una tarea de este tipo existen varias vías posibles, según que el acento sea puesto más sobre los aspectos históricos, sobre las matemáticas de los *Elementos*, o sobre los aspectos epistemológicos y filosóficos que esta obra puede ilustrar con gran eficacia. Cualquier enfoque es legítimo didácticamente, aunque se pueda correr el riesgo, en algunos casos, de desfigurar el rostro auténtico del pensamiento matemático griego. Baste pensar en la cuestión de la *traducción algebraica* de los *Elementos*, y su utilidad desde el punto de vista de la lectura histórica de la obra o bien de su utilización en la enseñanza. Se trata de un problema cuya solución no

puede ser obligada y lo importante es que el profesor elija su vía teniendo presente los conocimientos históricos actuales. En tal sentido es muy útil el análisis de Ivor GRATTAN-GUINNESS 1996, donde se hacen por ejemplo interesantes referencias a las notas de la edición de Heath (que recurre a menudo a la lectura algebraica).

Terminamos estos comentarios mencionando una selección clásica en 2 volúmenes, en traducción al inglés (incluida en la colección "The Loeb Classical Library", n. 335 y 362), de fragmentos matemáticos de autores griegos, en la que se encuentran los fragmentos completos referidos a Euclides que hemos mencionado en este libro, escritos por Proclo, Pappus y otros autores antiguos (MATEMÁTICA GRIEGA, vol. 1, capítulo XV). Valga, en fin, como invitación a esta *recuperación* de Euclides en la enseñanza y en la cultura matemática, cuanto ha escrito Puertas Castaños como nota conclusiva de su traducción de los *Elementos* (EUCLIDES a, vol. 3, p. 358, n. 76):

"Es difícil negarse a reconocer el olfato de los antiguos matemáticos griegos para dar con temas de importancia básica, con cuestiones de permanente interés y con objetos capaces de seducir a gentes de diversos tiempos y culturas. Si estas formas de proyección son una de las marcas de un «autor clásico», hay autores clásicos tanto en el campo de las artes y las letras como en el campo del conocimiento y del método científico: los hay a pesar de los prejuicios «literarios» que dan en limitar el legado griego al ámbito de las humanidades; los hay a pesar de los prejuicios «científicos» que dan en suponer que el conocimiento no puede desarrollarse sin matar al padre. Euclides es un autor clásico".

Referencias bibliográficas

Fuentes primarias

EUCLIDES a, *Elementos*, 3 volúmenes, Madrid, Gredos, 1991, 1994, 1996 (BCG 155, 191, 228).

EUCLIDES b, *Óptica, Catóptrica, Fenómenos*, Madrid, Gredos, 1999, editado junto a dos obras atribuidas a Aristóteles, *Sobre las líneas indivisibles* y *Mecánica* (BCG 277).

EUCLIDES c, *Euclide d'Alexandrie: Les Éléments. Traduction et commentaire*, 4 volúmenes (B. Vitrac, ed.), París, Presses Universitaires de France, 1990, 1994, 1998.

EUCLIDES d, *The thirteen books of Euclid's Elements*, 3 volúmenes (Th. Heath, ed.), Cambridge, Oxford University Press, 1926, 2ª edición (reimpresión Nueva York, Dover, 1981).

EUCLIDES e, *Gli Elementi di Euclide* (A. Frajese y L. Maccioni, eds.), Turín, UTET, 1970 (reimpresión 1988).

EUCLIDES f, *Los Elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna: Libros I-IV* (F. Enriques, dir.), Madrid, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1954.

ARQUÍMEDES, *El método* (Introducción y notas de L. Vega, traducción de M. L. Puertas y L. Vega), Madrid, Alianza Editorial, 1986.

PROCLO, *A commentary of the first book of Euclid's* Elements (G. R. Morrow, ed.), Princeton, Princeton University Press, 1992, 2ª edición.

MATEMÁTICA GRIEGA, *Selections illustrating the history of Greek mathematics*, 2 volúmenes (vol. I *From Thales to Euclide*, vol. II *From Aristarchus to Pappus*) (I. Thomas, ed.), Londres/Cambridge, Mass., William Heinemann/Harvard University Press, 1939 (hay varias reimpresiones).

Estudios

Benno ARTMANN 1999, *Euclid. The creation of mathematics*, Nueva York, Springer-Verlag, 1999.

Stella BARUK 1992, *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, París, Editions du Seuil.

J. L. BERGGREN 1984, "History of Greek mathematics: A survey of recent research", *Historia mathematica*, 11: 394-410.

Enrico BETTI y Francesco BRIOSCHI 1867, *Gli Elementi d'Euclide con note aggiunte ed esercizi ad uso de' ginnasi e de' licei*, Florencia, Le Monnier.

Ranuccio BIANCHI BANDINELLI (dir.) 1983, *Historia y civilización de los griegos*, vol. IX. *La cultura helenística. Filosofía, ciencia, literatura*, Barcelona, Icaria/Bosch (ed. original 1977).

Ivor BULMER-THOMAS 1970-1981 "Euclid. Life and Works", en *Dictionary of scientific biography* (Ch. Gillispie, ed.), vol. IV, Nueva York, Scribner: 414-437.

Giuseppe CAMBIANO 1991, *Platone e le tecniche*, Roma-Bari, Laterza.

Amy DAHAN-DALMEDICO y Jeanne PEIFFER 1986, *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*, París, Editions du Seuil.

Philip J. DAVIS y Reuben HERSH 1988, *Experiencia matemática*, Barcelona/Madrid, Madrid, Centro de Publicaciones del MEC.

Alberto DOU 1967, "Los paralogismos de Euclides y Saccheri en la teoría de las paralelas", *Revista de la Real Academia de Ciencias*, 61:155-174.

Alberto DOU 1974, *Fundamentos de las matemáticas*, Barcelona, Editorial Labor, 2ª edición.

Alberto DOU 1986, "Euclides", en *Historia de las matemáticas hasta el siglo XVIII*, Madrid: 61-78.

David FOWLER 1999, *The mathematics of Plato's Academy. A new reconstruction*, Oxford, Oxford University Press, 2ª edición.

Paolo FREGUGLIA 1982, *Fondamenti storici della geometria*, Milán, Feltrinelli.

Kurt VON FRITZ 1971, *Grundproblem der Geschichte der antiken Wissenschaft*, Berlín-Nueva York, Walter de Gruyter.

Ludovico GEYMONAT 1985, *Historia de la filosofía y de la ciencia, 1, Antigüedad y Edad Media*, Barcelona, Crítica.

Livia GIACARDI 2003, "L. Cremona, G. Vailati e C. Segre. Tre diversi approcci al problema dell'insegnamento de lla matematica fra '800 e '900", en *L'insegnante di matematica nella scuola d'oggi: formazione e pratica professionale (XXIII Convegno nazionale UMI-CIIM sull'insegnamento della matematica, Loano (SV), 3-4-5 ottobre 2002)* (G. Anichini, ed.), Bologna, Edizioni dell'Unione Matematica Italiana, 63-75.

G. GIANNANTONI, Mario VEGETTI (eds.)1984, *La scienza ellenistica*, Nápoles, Bibliopolis.

Enrico GIUSTI 1993, *Euclides reformatus. La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana*, Turín, Bollati Boringhieri.

P. M. GONZÁLEZ URBANEJA 2001, *Pitágoras. El filósofo del número*. Madrid, NIVOLA.

Ivor GRATTAN-GUINNESS 1996, "Numbers, ratios, and proportions in Euclid's *Elements*: How did he handle them?, *Historia mathematica*, 23, 355-375.

Miguel de GUZMÁN 1997, *Mirar y ver. Nueve ensayos de geometría intuitiva*, Madrid, Alhambra. Existe 2º edición, 2004, Madrid, NIVOLA.

Miguel de GUZMÁN 1991, *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*, Madrid, Pirámide.

Thomas L. HEATH 1921, *A history of Greek mathematics*, Londres, Clarendon Press (edición Dover, Nueva York 1981).

Jens HØYRUP 1994, *In measure, number, and weight. Studies in mathematics and culture*, Albany, State University of New York Press.

H. R. JACOBS 1987, *Geometry*, Nueva York, Freeman and Co, 2ª edición.

Morris KLEIN 1992, *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Madrid, Alianza Editorial, 3 vols. (ed. or. 1972)

Wilburr R. KNORR 1975, *The evolution of Euclidean Elements*, Dordrecht/Boston, D. Reidel.

Wilburr R. KNORR 1986, *The ancient tradition of geometrical problems*, Basilea, Birkhäuser.

Wilburr R. KNORR 1989, *Textual studies in ancient and medieval geometry*, Boston, Birkhäuser.

Wilburr R. KNORR 1996, "The wrong text of Euclid: On Heiberg's text and its alternatives", *Centaurus*, 38:208-276.

Geoffrey E. R. LLOYD 1991, *Methods and problems in Greek science*, Cambridge, Cambridge University Press.

Walter MARASCHINI y Marta MENGHINI 1992, "Il metodo euclideo nell'insegnamento della geometria", *L'educazione matematica*, 3: 161-181.

Ana MILLÁN GASCA 2004, *All'inizio fu lo scriba. Piccola storia della matematica come strumento di conoscenza*, Milán, Decibel-Zanichelli.

Ian MUELLER 1981, *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*, Cambridge, Mass./Londres, The MIT Press.

John E. MURDOCH 1970-1981, "Euclid. Transmission of the Elements", en *Dictionary of scientific biography* (Ch. Gillispie, ed.), vol. IV, Nueva York, Scribner: 437-459.

Reuven NETZ 1998, "Deuteronomic texts: Late Antiquity and the history of mathematics", *Revue d'histoire des mathématiques*, 4: 261-288.

Reuven NETZ 1999, *The shaping of deduction in Greek mathematics*, Cambridge, Mass., Cambridge University Press.

Reuven NETZ 2000, "Euclide e la matematica del IV secolo", *en Storia della scienza*, vol. I, *La scienza antica*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana: 723-740.

Julio REY PASTOR y José BABINI 1984, *Historia de la matemática*, 2 vols., Barcelona, Gedisa.

Arpad SZABÓ 1978, *The beginnings of Greek mathematics*, Boston/Dordrecht, D. Reidel.

René TATON (dir.) 1988, *Historia general de las ciencias. Vol. I, 2. Las ciencias en el mundo greco-romano*, Orbis, Barcelona.

R. TORIJA HERRERA 1999, *Arquímedes. Alrededor del círculo*, Madrid, NIVOLA.

Luis VEGA 1990, *La trama de la demostración. Los griegos y la razón tejedora de pruebas*, Madrid.

Bertheel VAN DER WAERDEN 1961, *Science awakening*, Nueva York, Oxford University Press.

Bertheel VAN DER WAERDEN 1983, *Geometry and algebra in ancient civilizations*, Berlín/Heidelberg/Nueva York, Springer-Verlag.

Euclides

La fuerza del razonamiento matemático

Una característica esencial de la matemática griega era que se trataba de una disciplina que se cultivaba por sí misma, independientemente de su aplicación o valor práctico. Este tipo de saber desinteresado, sin utilidad inmediata, era típico de esta cultura, y en ella las matemáticas representaron uno de los principales ejemplos de una *contemplación* tal de la verdad, una forma de conocimiento puro.

El objetivo de Euclides al escribir los *Elementos*, su obra clave, era reunir en un texto el conjunto de conocimientos fundamentales que los matemáticos griegos habían acumulado hasta entonces, exponiéndolos de manera sistemática. Su éxito fue tan grande que siguió leyéndose durante siglos, fue copiado a mano sin cesar cuando no existía la imprenta y se tradujo a las lenguas cultas más importantes.

Ana Millán Gasca, profesora de la Universidad de Roma *Tor Vergata*, es autora de numerosos libros y artículos de historia y cultura matemática. Su principal tema de investigación es la historia de la matemática aplicada.

19

La matemática en sus personajes



